بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری برای یک محصول بیمه‌زندگی پویا با استفاده از ابزارهای کنترل تصادفی

سامان وهابی[1]؛ امیرتیمور پاینده نجف آبادی[2]

چکیده:

هدف: در این مقاله ما به کمک رویکرد کنترل تصادفی یک محصول بیمه عمر به شرط حیات طراحی نموده‌ایم. این محصولات به این صورت است که در ازای دریافت مبلغی به عنوان حق بیمه که در زمان‌های مشخص پرداخت می‌شود، بیمه گر متعهد می‌شود زمانی که بیمه‌شده در انتهای قرارداد در قید حیات باشد، مزایای بیمه‌ای را پرداخت کند.

روش‌شناسی: این پژوهش از نظر هدف توسعه‌ای- کاربردی از نوع مطالعات تحلیلی محسوب می‌شود. در ادبیات بیمه‌های زندگی محصولات متنوعی وجود دارد که در نحوه پرداخت مزایا و زمان اجرا با هم متفاوت هستند. از این محصولات می‌توان به بیمه‌های عمر زمانی، بیمه‌های عمر به شرط حیات و بیمه‌های عمر مختلط اجاره نمود. محصولات بیمه‌ای سنتی که دارای مزایای ثابتی هستند، به دلیل وجود بازارهای تورمی به سرعت جذابیت خود را از دست می‌دهند. در این مقاله به طراحی یک محصول بیمه زندگی به شرط حیات پرداختیم که متصل به بازارهای سرمایه گذاری است. در این مقاله برای شبیه سازی دارایی‌های بازارهای سرمایه از مدل‌های حساب دیفرانسیل تصادفی استفاده شده است. تمامی نتایج عددی این پژوهش به کمک نرم افزار **Matlab** و **Maple** انجام شده است.

یافته‌ها: به منظور بهترین انتخاب سرمایه گذاری، به کمک ابزار کنترل بهینه تصادفی، بهترین استراتژی سرمایه گذاری برای شخصی که دارای تابع مطلوبیت CRRA است و این محصول را خریداری می‌کند، محاسبه شده که تا بیشترین مزایا را در پایان قرارداد پرداخت شود. برای سرمایه گذاری این قرارداد، در بازاری غیر ریسکی مانند بانک و بازاری ریسکی مانند سهام که دارای پرش‌های در قیمت بوده، مدل سازی انجام شده است. همچنین برای مدل کردن دارایی ریسکی از مدل کو که به عنوان نماینده‌ای از مدل‌های با فعالیت متناهی است، استفاده شده و در انتها برای چند تابع مرگ و میر مقایسه انجام شده است.

نتیجه‌گیری: اصلی ترین هدف این مقاله سرمایه گذاری برای بیمه‌شده‌هایی هست که این محصول را خریداری کرده‌اند. در محصولی که در این مقاله طراحی شده است، بیمه گر متعهد می‌شود که حق بیمه‌های دریافتی را با نرخ تضمینی در انتهای قرارداد پرداخت کند. همچنین از سود حاصل از سرمایه گذاری به درصدی مشخص که در ابتدای هر سال معین می‌شود، بیمه‌شده را سهیم نماید. شبیه سازی‌ها نشان می‌دهد که رفتار نرخ مصرف بهینه همانند مدل مرتون می‌باشد با این تفاوت که در نرخ مصرف بهینه طراحی شده در این مقاله رفتار پرش‌های قیمت کامل مشهود است. نتایج سرمایه گذاری برای چندین تابع مرگ و میر در بخش نتایج عددی گزارش شده است.

واژگان کلیدی: بیمه زندگی به شرط حیات، تابع مطلوبیت CRRA، کنترل تصادفی بهینه، تابع مرگ و میر، مدل کو

---

1. دانشجوی دکتری بیمسنجی، گروه بیمسنجی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران.

2. استاد بیمسنجی، گروه بیمسنجی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران. (**نویسنده مسئول**)

Optimal investment portfolio for a dynamic life insurance product using stochastic control approach

Abstract

Objective: **In this paper, we have designed a life insurance product with optimal stochastic control approach. These products are such that in exchange for receiving an amount as insurance premium that is paid at specific times, the insurer undertakes to pay insurance benefits when the policyholder is alive at the end of the contract.**

Methodology: This research is an applied-development study in terms of its objectives and is considered as an analytical study. In the life insurance literature, there are a variety of products that differ in how benefits are paid and when they are implemented. These products can be used as Term insurance, Pure Endowment life insurance and Endowment life insurance. Traditional insurance products that have benefits are fixed, they quickly lose their appeal due to the existence of inflationary markets. In this article, we designed a pure endowment in which an insurance company agrees to pay the insured a certain amount of money if the insured is still alive at the end of specific time period. In our designed contract, premiums are received from the policyholder at certain times. The insurer undertakes to pay the premiums by a certain guarantee rate, in addition, by investing in a portfolio of risky and risk free assets and share invest profits. Therefore, stochastic optimal control approach have been used to model investment. All numerical results of this research have been done with the help of Matlab and Maple.

Findings: In this paper, we focus on the investment (in a finite timetable) for the person who buys this policy. In general, we consider a portfolio of the risky and risk free asset and find an optimal strategy and consumption for this portfolio. Optimal allocation of capital among a set of financial assets under conditions of uncertainty and risk is a well-established research field in finance theory. In order to choose the best investment, with the help of the stochastic optimal control approach, the best investment strategy for a person who has the CRRA utility function and buys this product is calculated to pay the most benefits at the end of the contract. To invest in this contract, modeling has been done in a non-risky market such as a bank and a risky market such as stocks that have price jumps. Also, to model the risk asset, the Kou model, which is a representative of models with finite activity, was used, and at the end, a comparison was made for several mortality functions.

Conclusion: The main purpose of this article is investment for policyholders who have purchased this product. In the product designed in this paper, the insurer undertakes to pay the premiums received at a guaranteed rate at the end of the contract, and also to pay a certain percentage of the profit from the investment that is determined at the beginning of each year. The simulations show that the behavior of the optimal consumption rate is the same as the Merton model, with the difference that the behavior of jumps price is evident in the optimal consumption rate designed in this article. Investment results for several mortality functions are reported in the numerical results section.

Key words: pure endowment, CRRA utility function, stochastic optimal control, mortality function, Kou model

مقدمه

در ادبیات بیمه‌های زندگی محصولات متنوعی وجود دارد که در نحوه پرداخت مزایا و زمان اجرا با هم متفاوت هستند. از این محصولات می‌توان به بیمه‌های عمر زمانی، بیمه‌های عمر به شرط حیات و بیمه‌های عمر مختلط اجاره نمود. در این مقاله ما به کمک رویکرد کنترل تصادفی یک محصول بیمه عمر به شرط حیات طراحی نموده‌ایم. این محصولات به این صورت است که در ازای دریافت مبلغی به عنوان حق بیمه که در زمان‌های مشخص پرداخت می‌شود، بیمه گر متعهد می‌شود زمانی که بیمه‌شده در انتهای قرارداد در قید حیات باشد، مزایای بیمه‌ای را پرداخت کند. در محصولی که در این مقاله طراحی شده است، علاوه بر اینکه بیمه گر متعهد می‌شود که حق بیمه‌های دریافتی را با یک نرخ تضمینی در انتهای قرارداد پرداخت کند، از سود حاصل از سرمایه گذاری که درصدی مشخص و در ابتدای هر سال معین می‌شود، پرداخت نماید. اصلی ترین هدف این مقاله سرمایه گذاری برای بیمه‌شده‌هایی هست که این محصول را خریداری کرده‌اند. برای این کار ما پرتفویی از دارایی‌های ریسکی و غیر ریسکی تشکیل می‌دهیم و به محاسبه استراتژی بهینه و نرخ مصرف بهینه می‌پردازیم. از این رو از رویکرد کنترل تصادفی بهینه استفاده شده است. به طور کلی به کمک این رویکرد فرض می‌کنیم دارایی ریسکی دارای دینامیکی تصادفی باشد. در این مقاله از سهام به عنوان دارایی ریسکی و پول بانکی به عنوان دارایی غیر ریسکی برای مدل سازی استفاده شده است. اصلی‌ترین فرض این مقاله این است که در رفتار قیمت دارایی ریسکی، پرش‌های از خانواده فرآیندهای لوی وجود دارد. به طور کلی مدل‌های مالی همراه با پرش را که در تعداد و رفتارشان در پرش با هم متفاوت هستند، می‌توان به دو بخش تقسیم بندی کرد. این مدل‌ها از دسته خانواده فرآیندهای لوی هستند. دسته اول این مدل‌ها، مدل‌های با فعالیت نامتناهی هستند. در این مدل‌ها قسمت پرش بیشترین نقش را در این فرآیندها دارد و قسمت پخش این فرآیندها به ندرت رخ می‌دهد. از معروف‌ترین این مدل‌ها می‌توان به مدل واریانس-گاما اشاره کرد. دسته دوم این مدل‌ها، مدل‌های با فعالیت متناهی هستند که در ساختار خود هم قسمت پخش و هم قسمت پرش وجود دارد. از معروف ترین این مدل‌ها می‌توان به مدل پخش و پرش مرتون و یا مدل پخش و پرش کو اشاره کرد. در این مقاله ما از مدل پخش و پرش کو برای ساختار دارایی ریسکی استفاده کرده‌ایم. از این رو ساختار کلی مقاله را به صورت زیر بیان می‌کنیم.

در بخش دوم پیشینه تحقیق بیان شده است. در بخش سوم مبانی نظری، معرفی محصول و برخی تعاریف اولیه که در بخش‌های بعدی به آنها نیاز داریم، معرفی می‌شود. در بخش چهارم اصلی‌ترین سوالات این مقاله را بیان شده است. در بخش پنجم کلیات سرمایه گذاری پرتفو با رویکرد کنترل بهینه تصادفی مطرح و چند مثال از آن بیان می‌شود. در بخش آخر نتایج عددی و تجزیه تحلیل داده‌های این مقاله به کمک نرم افزار **Matlab** و **Maple** ارائه می‌شود.

پیشینه تحقیق

مساله تخصیص بهینه یکی از اصلی‌ترین مسائل در ادبیات بیمه و ریاضیات مالی است که از دیر باز مورد توجه بوده است. از اولین افرادی که به این مساله توجه ویژه‌ای داشته را می‌توان به مرتون[3] (**1969**) اشاره نمود. وی ابتدا مساله بهینه سازی پرتفو مالی رویکرد کنترل تصادفی بهینه مطرح نمود و به محاسبه استراتژی بهینه برآمد. مرتون[4] (**1975**) مساله کنترل تصادفی بهینه را در حضور نرخ مصرف بیان کرد و با همین ادبیات نرخ مصرف بهینه را محاسبه کرد. یاری[5] (**1965**) مساله بیمه‌های زندگی را برای یک شخص با طول عمر تصادفی مطرح کرد.

در حقیقت محصولی در این مقاله طراحی شده است به نوعی شبیه به بیمه‌های عمر متصل به بازارهای سرمایه گذاری است. بارگیو و دیلانگ[6] (**2020**) با طراحی یک محصول بیمه‌ای متصل به سهام در بازاری دارای عدم قطعیت، به قیمت گذاری این محصول به کمک روش شبکه عصبی پرداختند. سی سی و همکاران[7] (**2017**) یک محصول بیمه‌ای عمر مختلط را با قابلیت پوشش ریسک را طراحی کرده که پرداخت‌های آن به بازار سهام بستگی داشته است. در این مقاله ما از مدل پخش و پرش کو برای مدل سازی قیمت دارایی ریسکی خود که همان سهام باشد، استفاده کرده‌ایم. ونگ و همکاران[8] (**2021**) یک محصول بیمه‌ای متصل به واحد را مطرح و مزایای فوت این محصول را به کمک تبدیلات فوریه برای یک مدل پخش و پرش قیمت گذاری کرده‌اند. هارتس[9] (**2021**) به

---

3 Merton
4 Merton
5 Yaari
6 Barigou & Delong
7 Ceci et al
8 Wang et al
9 Huertas

کمک مدل‌های کسرپذیر، ذخایر ریاضی که از جمله تعهدات آتی شرکت بیمه در قبال بیمه‌شده‌ها است، را برای یک محصول بیمه‌ای محاسبه کرده‌اند.

اصلی‌ترین نتایج این مقاله به موضوع سرمایه گذاری با استفاده از حق بیمه‌های دریافتی از بیمه شده‌ها می‌باشد. در این ادبیات، لی و همکاران[10] (2016) با در نظر گرفتن مساله یک بهینه سازی بیمه‌ای و اتکائی به محاسبه استراتژی و نرخ مصرف بهینه وقتی دینامیک دارایی ریسکی این فرآیند از مدل هستون پیروی می‌کند، برآمده است. از دیگر کاربردهای دیگر کنترل بهینه تصادفی می‌توان به طراحی صندوق‌های بازنشستگی با مزایای معین و مشارکت معین اشاره نمود. ژو و گائو[11] (2020) یک فرم بسته‌ای از جواب کنترل بهینه تصادفی برای یک صندوق بازنشستگی با مشارکت معین به دست آورده‌اند. مشابه آنها، دانگ و ژنگ[12] (2020) با رویکرد کنترل بهینه تصادفی دوگانه یک صندوق بازنشستگی با مشارکت معین طراحی و ارزیابی کرده‌اند. یاو و همکاران[13] (2020) به کمک نرخ بهره تصادفی که از مدل اونشتاین-اوهلنبرگ استفاده کرده‌اند، استراتژی بهینه و نرخ مصرف بهینه را برای محاسبه کرده و تاثیر نرخ بهره تصادفی را بر استراتژی بهینه گزارش کرده‌اند. از نمونه مقالاتی که به محصول بیمه عمر به شرط حیات طراحی کرده‌اند، می‌توان به مقاله سی سی و همکاران[14] (2020) اشاره نمود که با استفاده روش BSDEs به قیمت گذاری قرارداد پرداختند.

با توجه به توضیحات بالا، در این مقاله ما به کمک رویکرد کنترل تصادفی یک محصول بیمه عمر به شرط حیات طراحی نموده‌ایم. این محصولات به این صورت است که در ازای دریافت مبلغی به عنوان حق بیمه که در زمان‌های مشخص پرداخت می‌شود، بیمه گر متعهد می‌شود زمانی که بیمه‌شده در انتهای قرارداد در قید حیات باشد، مزایای بیمه‌ای را پرداخت کند.

مبانی نظری

این مقاله به معرفی یک محصول بیمه عمر به شرط حیات با رویکرد کنترل بهینه تصادفی می‌پردازد. یک محصول بیمه عمر به شرط حیات، محصولی است که شرکت بیمه متقبل می‌شود که در ازای دریافت حق بیمه معین در بازه

[10] Li et al
[11] Xu & Gao
[12] Dong & Zheng
[13] Yao et al
[14] Ceci et al

زمانی خاص، سرمایه حیات این بیمه نامه را در پایان قرارداد بیمه نامه به شرطی که بیمه شده در حیات باشد، بپردازد. در این محصول حق بیمه‌های دریافتی را با P(t) نمایش می‌دهیم که در زمان‌های مشخصی دریافت می‌شود همچنین بیمه گر متعهد که این حق بیمه‌ها را با نرخ تضمین g به بیمه‌شده بازگرداند بعلاوه با سرمایه گذاری در بازارهای مالی، وی را از سود حاصل از سرمایه گذاری بهره مند سازد. این نرخ مشارکت را با τ نشان می‌دهیم. زمان سر رسید قرارداد را با T و همچنین این دو نرخ تضمین و مشارکت در ابتدای هر سال بروز رسانی می‌شود. در این محصول تمامی مبالغی که برای بیمه‌شده از سود حاصل از سرمایه گذاری جمع آوری می‌شود، در حسابی به نام حساب مشتری گردآوری می‌شود که آن را با C_t^+ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$C_t^+ = \begin{cases} P & t=0 \\ (1+g)C_{t-1} + \tau\left[W_t^{\pi^*,c^*} - (1+g)C_{t-1}\right]^+ & t=1,\dots,T \end{cases} \quad (1)$$

که در آن به ازای هر مقدار ثابت A، خواهیم داشت $[A]^+ = \max[A,0]$ و همچنین $W_t^{\pi^*,c^*}$ حساب سرمایه گذاری بیمه‌شده است که تحت استراتژی بهینه (π^*) و نرخ مصرف بهینه (c^*) نمایش داده شده است. این دو مقدار را در ادامه کامل معرفی خواهیم کرد. حساب دیگری که در این قرارداد معرفی شده است، حساب ذخیره نام دارد و آن را با R_t^+ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$R_t^+ = \begin{cases} 0 & t=0 \\ W_t^{\pi^*,c^*} - (1+g)C_{t-1} - \tau\left[W_t^{\pi^*,c^*} - (1+g)C_{t-1}\right]^+ & t=1,\dots,T \end{cases} \quad (2)$$

این حساب به گونه‌ای طراحی شده است که مواقعی بازار بحرانی باشد پشتوانه‌ای برای بیمه گر شود تا از عهده تعهدات خود بر آید. در محصول بیمه‌ای به شرط حیات تمامی مزایای بیمه نامه در زمان سر رسید **T** پرداخت می‌شود؛ به همین جهت حساب مشتری در زمان سر رسید برابر است با:

$$C_T = (1+g)^T C_0 + \tau\sum_{t=1}^{T}\left[W_t^{\pi^*,c^*} - (1+g)C_{t-1}\right]^+ (1+g)^{T-t}. \quad (3)$$

در ادامه به جزئیات سرمایه گذاری با حق بیمه‌های دریافتی از بیمه‌شده‌ها می‌پردازیم. روش کار به این صورت است که با تشکیل پرتفویی از دو بازار ریسکی و غیر ریسکی، به دنبال محاسبه بهترین استراتژی سرمایه گذاری برای بیمه گذاران هستیم. برای شروع فرض می‌کنیم مدل‌هایی که از آنها استفاده می‌کنیم همگی در فضای $(\Omega,\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]},\mathbb{P})$ می‌باشد.

در اینجا به معرفی دارایی غیر ریسکی می‌پردازیم. دارایی غیر ریسکی دارایی است که در بازدهی‌اش، ریسکی آن را تهدید نمی‌کند و همواره با نرخ ثابتی در حال رشد است. به عنوان مثال اوراق قرضه و پول بانکی نمونه‌هایی از این دارایی‌ها می‌باشد. در حالت کلی برای مدل سازی این دارایی‌ها، می‌توان از دینامیک زیر پیروی کرد.

$$\frac{dB(t)}{B(t)} = r(t)dt, \quad B(0) = 1, \qquad (4)$$

که با نرخ بهره **r** همواره رشد می‌کند. دارایی دیگر پرتفو بیمه‌ای این مقاله، دارایی ریسکی است. دارایی ریسکی آن دسته از دارایی‌هایی هستند که در بازدهی و سود آن‌ها اطمینانی وجود ندارد و شرایط بازار سود یا زیان آن را تعیین می‌کند. در این مقاله ما از سهام به عنوان دارایی ریسکی استفاده کرده‌ایم که دارایی دینامیک تصادفی زیر است.

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \left(\mu(t) + \frac{1}{2}\sigma(t)^2\right)dt + \sigma(t)dZ(t) + \int_{-\infty}^{\infty}(e^x - 1)N(dt,dx), \quad S(0) = S_0, \qquad (5)$$

در رابطه **5** که یک معادله دیفرانسیل تصادفی است، ضریب dt را ضریب رانش[15]، ضریب dZ را ضریب پخش[16] و Z(t) یک حرکت براونی استاندارد است. فرض ما بر این است که در دینامیک سهام، به دلیل نوسانات قیمت، پرش‌هایی در قیمت دارایی وجود دارد و آن را به صورت یک عبارت انتگرالی نشان داده‌ایم. در این عبارت **x** مقدار هر پرش و $N(dt,dx)$ اندازه تصادفی پواسون است. براساس کتاب کنت و تانکو[17] (**2004**) هر اندازه تصادفی پواسون دارای یک اندازه تصادفی جبرانی[18] است که آن را $\Pi(\cdot,\cdot)$ نمایش می‌دهیم و به ازای هر تابع اندازه پذیر $\Phi(t,x)$ همواره رابطه زیر برقرار است.

$$\mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}} \Phi(t,x)N(dt,dx)\right) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(t,x)\Pi(t,dx)dt. \qquad (6)$$

در این مقاله فرض بر این است که حرکت براونی و فرآیند پرش از هم مستقل‌اند. بدون اینکه به کلیت مساله خللی وارد شود، در قسمت اندازه جبرانی فرآیند پواسون، یک متغیر دیگری به نام متغیر حالت[19] تعریف شده است

---

[15] Drift
[16] Diffusion
[17] Cont and Tankov
[18] Compensator Measure
[19] State Variable

که به صورت $\Pi(t,dx)=\Pi(v_t,dx)$ نمایش داده‌ایم. متغیر حالت در حقیقت بیانگر میزان فعالیت یک کسب و کار باشد. به عنوان مثال می‌توان به حجم نقدینگی یک بازار یا میزان حجم معاملات اشاره کرد. این پارامتر را هم می‌تواند تصادفی و هم ثابت فرض کرد که در این مقاله آن را ثابت فرض کردیم. در یک حالت خاص ما اندازه پرش فرآیند را نسبتی از متغیر حالت فرض می‌کنیم؛ به عبارت دیگر خواهیم داشت:

$$\Pi(v_t,dx)=v_t\Pi(dx). \qquad (7)$$

به طور کلی مدل‌های مالی همراه با پرش را که در تعداد و رفتارشان در پرش با هم متفاوت هستند، می‌توان به دو بخش تقسیم بندی کرد. این مدل‌ها از دسته خانواده فرآیندهای لوی هستند. دسته اول این مدل‌ها، مدل‌های با فعالیت نامتناهی[20] هستند. در این مدل‌ها قسمت پرش بیشترین نقش را در این فرآیندها دارد و قسمت پخش این فرآیندها به ندرت رخ می‌دهد. از معروف‌ترین این مدل‌ها می‌توان به مدل واریانس-گاما اشاره کرد. دسته دوم این مدل‌ها، مدل‌های با فعالیت متناهی[21] هستند که در ساختار خود هم قسمت پخش و هم قسمت پرش وجود دارد. از معروف ترین این مدل‌ها می‌توان به مدل پخش و پرش مرتون و یا مدل پخش و پرش کو[22] اشاره کرد. در این مقاله ما از مدل پخش و پرش کو برای ساختار دارایی ریسکی استفاده کرده‌ایم. برای مطالعه بیشتر در مورد این مدل‌ها می‌توان به کتاب کنت و تانکو[23] (**2004**) اشاره نمود.

همانطور که در بخش قبل بیان شد، در این مقاله ما توزیع پرش‌های فرآیند قیمت را از مدل کو استفاده کرده‌ایم. این پرش‌ها دارای تابع چگالی زیر هستند:

$$h_X(x)=p\beta_1 e^{-\beta_1 x}I_{\{x>0\}}+q\beta_2 e^{\beta_2 x}I_{\{x<0\}}, \qquad (8)$$

[20] Infinite Activity
[21] Finite Activity
[22] Kou
[23] Cont & Tankov

که در آن ضرایب $p \in [0,1], p+q=1$ می‌باشد. به عبارت دیگر مدل کو برای $\beta_1 > 1, \beta_2 > 0$ و همچنین پرش‌های مثبت و منفی با احتمال p، دو توزیع نمایی با پارامترهای β_1 و β_2 در نظر می‌گیرد. در ادامه برای محاسبه استراتژی و نرخ بهینه که به تفصیل به آن خواهیم پرداخت، نیاز به اندازه لوی مدل کو داریم. بر اساس مقاله کو[24] (**2002**) رابطه بین اندازه لوی و تابع چگالی فرآیند پرش برابر $\Pi(dx) = \lambda h_X(x)dx$ می‌باشد.

- تعریف: به تابع حقیقی مقدار و اندازه پذیر $\{\pi(t)\}_{t\in[0,T]}$ یک استراتژی پرتفو گوییم، هرگاه:

$$\int_0^T |\pi(t)W_t|^2 dt < \infty, \quad \mathbb{P}\text{- } a.s. \tag{9}$$

- به فرآیند نامنفی، حقیقی مقدار و اندازه پذیر $\{c(t)\}_{t\in[0,T]}$ فرآیند مصرف گوییم، هرگاه:

$$\int_0^T c(t)dt < \infty, \quad \mathbb{P}\text{- } a.s. \tag{10}$$

به کمک دو تعریف بالا و با استفاده از دینامیک دو دارایی ریسکی و غیر ریسکی، به تعریف فرآیند تصادفی ثروت $W^{\pi,c} := \{W_t^{\pi,c}\}_{t\in[0,T]}$ می‌پردازیم. فرم کلی معادله ثروت به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} dW_t^{\pi,c} &= ((r(t)+\pi(t)(\mu(t)+\frac{1}{2}\sigma(t)^2 - r(t)))W_t^{\pi,c} - c(t))dt \\ &+ P(t)dt + \pi(t)W_t^{\pi,c}\sigma(t)dZ(t) + \pi(t-)W_{t^-}^{\pi,c}\int_{-\infty}^{\infty}(e^x-1)N(dt,dx), \end{aligned} \tag{11}$$

که در آن $W_0^{\pi,c} = P(0)$ می‌باشد که از اولین حق بیمه دریافتی به وجود می‌آید. با توجه به تعریف قابل قبولی[25] هر استراتژی، استراتژی (π, c) قابل قبول است که به ازای هر $t \geq 0$ آنگاه $W_t^{\pi,c} \geq 0$ باشد.

- تعریف: برای اینکه بیشترین سود دراین محصول عاید بیمه‌شده شود، نیاز به تعیین رفتار سرمایه گذاری این آنان داریم. در ادبیات به این تعریف تابع مطلوبیت گویند. هر یک از افراد بنا به شرایط و خصوصیات شخصی در پذیرش ریسک‌های موجود، تابع مطلوبیت جداگانه‌ای دارند. در این تعریف ما دو تابع مطلوبیت **CRRA** را بیان می‌کنیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$U(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma} & \gamma \neq 1, \gamma > 0, \\ \log(x) & \gamma = 1, \end{cases} \tag{12}$$

[24] Kou
[25] Admissible

که در آن γ ضریب ریسک گریزی افراد معرفی می‌شود. در ادامه به طراحی محصول بیمه عمر به شرط حیات متصل به بازارهای سرمایه گذاری می‌پردازیم. همانطور که قبلا ذکر شد، در محصول بیمه عمر به شرط حیات، شرط حیات بیمه‌شده در پایان قرارداد، یکی از شروط اصلی اجرای قرارداد است؛ از این رو، باید برای سن بیمه‌شده توزیع احتمال در نظر بگیریم. با بهره گیری از کتاب گربر[26](2013) تابع بقاء $F(t)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. فرض می‌کنیم که τ طول عمر آتی یک شخص باشد، در این صورت احتمال اینکه این شخص تا t سال آینده زنده باشد، برابر است با:

$$F(t)=P\left(\tau\geq t\right) \tag{13}$$

از طرفی دیگر این احتمال بقاء را می‌توان از مفهوم نیروی مرگ و میر[27] به صورت زیر تعریف کرد.

$$\lambda(t)=\lim_{\delta t\to 0}\frac{P\left(t\leq\tau<t+\delta t\,|\,\tau\geq t\right)}{\delta t}=\frac{f(t)}{F(t)}, \tag{14}$$

که در آن $f(t)$ تابع چگالی سن آتی بیمه‌شده و $\lambda(t)$ نیروی مرگ و میر می‌باشد. با کمی ساده سازی خواهیم داشت:

$$F(t)=\exp\left\{-\int_0^t \lambda(u)du\right\}, \tag{15}$$

همچنین تابع احتمال بقاء از بازه t الی s با شرطی که $t\leq s$ باشد، برابر است با:

$$F(s,t)=\exp\left\{-\int_t^s \lambda(u)du\right\}. \tag{16}$$

---

[26] Gerber
[27] Force of Mortality

تا به اینجا مفاهیم و تعاریف مورد نیاز را برای محصول بیمه عمر متصل به شرط حیات که متصل به بازارهای سرمایه گذاری را بیان کردیم. حال در ادامه به هدف و اصل موضوع این مقاله با طرح سوالات زیر می‌پردازیم.

سوالات پژوهش

تا به اینجا به معرفی محصولی که در این مقاله طراحی شده است، پرداختیم. در ادامه مسائلی را طرح کرده و به حل آنها می‌پردازیم. همانطور که بیان شد اصلی ترین هدف این مقاله سرمایه گذاری برای شخصی که این محصول بیمه‌ای را خریداری می‌کند، می‌باشد. از این رو با سوالات زیر رو به رو هستیم.

- چه استراتژی سرمایه گذاری برای بیمه‌شده‌ها در نظر گرفته شود به طوریکه هم شرکت بر عهده تعهدات خود برآید و بیمه شده‌ها از خرید این محصول احساس رضایت کنند؟
- بهترین نرخ مصرف برای بیمه‌شده‌ها چه مقدار باشد تا آنان از دارایی خود را به بهترین نحو استفاده کنند؟
- آیا توابع مرگ و میر مختلف در تعیین استراتژی و نرخ مصرف بهینه تاثیردارد؟

روش شناسی پژوهش

در این بخش به سرمایه گذاری برای یک بیمه‌شده که محصول بیمه عمر به شرط حیات را خریداری می‌کند، پرداخته می شود. هدف این است که با تشکیل یک پرتفو بیمه‌ای به دنبال بهترین استراتژی سرمایه گذاری باشیم. کنترل بهینه تصادفی این مسیر را برای ما میسر ساخته است. با استفاده از رویکرد مرتون[28] (1972) و یاری[29] (1965) مساله بهینه سازی تصادفی زیر را تعریف می‌کنیم:

[28] Merton
[29] Yaari

$$J(W,t)=\sup_{\{\pi(s),c(s)\}_{0\le s\le t}} \mathbb{E}_t\left(F(T,t)\left(U(W_T^{\pi,c})+\int_t^T U(s,c(s))ds\right)\right), \qquad (17)$$

هدف رابطه **17** در مساله بهینه سازی این است که به دنبال بیشترین پرتفو مورد انتظار در انتهای قرارداد برای یک شخص با تابع مطلوبیتی دلخواه تحت دو استراتژی (π,c) می‌باشد. پس با انتخاب بهترین استراتژی رابطه **17** را ماکزیمم می‌کنیم. در رابطه **17**، U(.) همان تابع مطلوبتی است که در بخش قبلی به آن اشاره شده است. به کمک حساب دیفرانسیل تصادفی می‌توان نشان داد که تابع هدف **17** جوابی از معادله زیر است.

$$\begin{aligned}\Omega(W,\pi,c,t)=J_t-\lambda(t)J+\sup_{\{\pi(t),c(t)\}}\{&(r+\pi(\mu+\tfrac{1}{2}\sigma^2-r))W_t J_W\\ &-c J_W+U(t,c)+\tfrac{1}{2}\pi^2\sigma^2W_t^2 J_{WW}\\ &+\int_{-\infty}^{\infty}\left[J\left(W(1+\pi(e^x-1)),t\right)-J(W,t)\right]\Pi(\nu_t,dx)\}=0,\end{aligned} \qquad (18)$$

به معادله **18** در ادبیات تصادفی معادله همیلتون-ژاکوبی-بلمن[30] گویند که به اختصار به معادله **HJB** معروف است.

در ادامه برای اینکه استراتژی بهینه و نرخ مصرف بهینه را محاسبه کنیم، از $\Omega(W,\pi,c,t)$ در رابطه **18** نسبت به پارامترهای کنترل (π,c) مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم. به عبارت دیگر استراتژی بهینه و نرخ مصرف بهینه از حل رابطه **19** و **20**، به ازای هر تابع مطلوبیت و اندازه تصادفی دلخواه محاسبه می‌شود:

$$(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2-r)W_tJ_W+\pi^*\sigma^2W_t^2J_{WW}+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\pi}J(W(1+\pi^*(e^x-1)),t)\Pi(\nu_t,dx)=0. \qquad (19)$$

$$\frac{\partial}{\partial c}U(t,c^*)-J_W=0 \qquad (20)$$

---

[30] Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)

از خواص تابع مطلوبیت می‌توان به اکیداً صعودی بودن اشاره کرد و چون $\frac{\partial^2}{\partial c^2}U(t,c^*)=0$ در نتیجه c^* مقدار بیشینه می‌باشد. همچنین در استراتژی بهینه برای این π^* مقدار بیشینه باشد باید شرط $J_{ww}<0$ برقرار باشد. در ادامه استراتژی بهینه و نرخ مصرف بهینه را برای دو تابع مطلوبیتی که در بخش قبل معرفی کرده‌ایم، محاسبه می‌کنیم. فرض می‌کنیم تابع مطلوبیت بیمه‌شده از نوع $U(W_t)=e^{-\alpha T}\log(W_t),\ \ U(t,c_t)=e^{-\alpha t}\log(c_t),$ مطلوبیت لگاریتم باشد:

(21)

با پیروی از آتساهیلا و همکاران[31] (**2009**) فرض می‌کنیم جواب تابع هدف مساله ($J(W,t)$) به صورت حدس زیر باشد:

$$J(W,t)=U(W_t)f(t)+g(t), \tag{22}$$

قضیه **1-3**: فرض می‌کنیم بیمه‌شده دارای تابع مطلوبیت لگاریتم به فرم رابطه **21** و همچنین حدس جواب تابع هدف به صورت رابطه **22** باشد، در این صورت موارد زیر برقرار است:

- $f(t)$ و $g(t)$ توابع ثابت زیر می‌باشد.

$$f(t)=e^{\int_0^t \lambda(u)du}\left(\int_0^t e^{\alpha(T-s)-\int_0^s \lambda(u)du}ds\right), \tag{23}$$

$$\begin{aligned} &g'(t)-\lambda(t)g(t)+e^{-\alpha t}\left[\alpha(T-t)-\log(f(t))+1\right] \\ &(\left[(r+\pi(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2-r))-\frac{1}{2}\pi^2\sigma^2\right]+\phi(\pi^*))e^{-\alpha T}f(t)=0 \end{aligned} \tag{24}$$

که در آن $\phi(\pi^*)=\int_{-\infty}^{\infty}\log(1+\pi^*(e^x-1))\Pi(v_t,dx)$ می‌باشد.

---

[31] Ait-Sahalia et al

- با استفاده از توابع بالا استراتژی بهینه (π^*) و نرخ مصرف بهینه (c^*) از روابط زیر بدست می‌آید:

$$-\pi^*\sigma^2+\left(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2-r\right)+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(e^x-1)}{1+\pi^*(e^x-1)}\Pi(\nu_t,dx)=0, \tag{25}$$

$$c_t^*=e^{\alpha(T-t)}\frac{W_t}{f(t)}. \tag{26}$$

اثبات: با استفاده از مشتق مرتبه اول[۳۲] از معادله **HJB** و مشتق گرفتن نسبت به پارامترهای کنترل، استراتژی بهینه و نرخ مصرف بهینه بدست می‌آید. با قرار دادن مقادیر بهینه در معادله **HJB** خواهیم داشت:

$$J(W_t,t)=e^{-\alpha T}\log(W_t)f(t)+g(t)$$

$$\begin{cases} J_W=\dfrac{e^{-\alpha T}f(t)}{W_t} \\ J_{WW}=-\dfrac{e^{-\alpha T}f(t)}{W_t^2} \\ J_t=e^{-\alpha T}\log(W_t)f'(t)+g'(t) \\ U(t,c_t^*)=e^{-\alpha t}\left[\alpha(T-t)-\log(f(t))+\log(W_t)\right] \end{cases} \tag{27}$$

با قرار دادن رابطه **27** در معادله **HJB** خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &e^{-\alpha T}\log(W_t)f'(t)+\left[(r+\pi(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2-r))-\frac{1}{2}\pi^2\sigma^2\right]e^{-\alpha T}f(t)- \\ &\lambda(t)g(t)+g'(t)+e^{-\alpha t}\left[\alpha(T-t)-\log(f(t))+\log(W_t)+1\right]- \\ &e^{-\alpha T}\lambda(t)\log(W_t)f(t)+e^{-\alpha T}f(t)\int_{-\infty}^{\infty}\log(1+\pi^*(e^x-1))\Pi(\nu_t,dx)=0, \end{aligned} \tag{28}$$

برای حذف W_t از رابطه بالا معادله زیر را داریم:

---

[32] First Order Condition

$$e^{-\alpha T}\log(W_t)f'(t)-e^{-\alpha T}\lambda(t)\log(W_t)f(t)+e^{-\alpha t}\log(W_t)=0. \qquad (29)$$

که از این معادله $f(t)$ محاسبه می‌شود. در ادامه با جایگذاری $f(t)$ در معادله HJB، $g(t)$ محاسبه می‌شود.

در ادامه استراتژی بهینه و نرخ مصرف بهینه را برای تابع مطلوبیت توانی محاسبه می‌کنیم. فرض می‌کنیم تابع مطلوبیت توانی به فرم زیر باشد.

$$U(W_t)=\mathrm{e}^{-\alpha T}\frac{W_t^{1-\gamma}}{1-\gamma},\quad U(t,c)=\mathrm{e}^{-\alpha t}\frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \qquad (30)$$

در این حالت حدس جواب تابع هدف به فرم زیر است:

$$J(W_t,t)=U(W_t)f^{\gamma}(t), \qquad (31)$$

قضیه 2-3: فرض می‌کنیم بیمه‌شده دارای تابع مطلوبیت توانی به فرم رابطه **30** و همچنین حدس جواب تابع هدف به صورت رابطه **31** باشد، در این صورت موارد زیر برقرار است:

- با مفروضات بالا $f(t)$ برابر است با:

$$f(t)=\left(\int_0^t e^{-\frac{(\alpha+\Psi(\pi^*))(T-s)}{\gamma}+\frac{1}{\gamma}\int_0^s\lambda(u)du}ds\right)e^{\frac{1}{\gamma}\left(\int_0^t\lambda(s)ds-\Psi(\pi^*)(T-t)\right)} \qquad (32)$$

$$\begin{cases}\Psi(\pi^*)=(1-\gamma)\left(\left(r+\pi^*\left(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2-r\right)\right)-\frac{\gamma\pi^{*2}\sigma^2}{2}\right)+\Phi(\pi^*)\\ \Phi(\pi^*)=\int_{-\infty}^{\infty}\left((1+\pi^*(e^x-1))^{1-\gamma}-1\right)\Pi(\nu_t,dx)\end{cases} \qquad (33)$$

- با استفاده از توابع بالا استراتژی بهینه (π^*) و نرخ مصرف بهینه (c^*) از روابط زیر بدست می‌آید:

$$-\gamma\sigma^2\pi^*+(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2-r)+\int_{-\infty}^{\infty}(1+\pi^*(\mathrm{e}^x-1))^{-\gamma}(\mathrm{e}^x-1)\Pi(\nu_t,dx)=0. \qquad (34)$$

$$c^*(t)=e^{\frac{\alpha(T-t)}{\gamma}}\frac{W_t}{f(t)}. \qquad (35)$$

اثبات: همانند تابع مطلوبیت لگاریتم، با استفاده از مشتق مرتبه اول از معادله HJB و با جایگذاری مشتقات زیر خواهیم داشت:

$$J(W_t,t)=e^{-\alpha T}\frac{W_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}f^{\gamma}(t),$$

$$\begin{cases} J_W=e^{-\alpha T}f^{\gamma}(t)W_t^{-\gamma} \\ J_{WW}=-\gamma e^{-\alpha T}f^{\gamma}(t)W_t^{-\gamma-1} \\ J_t=\gamma e^{-\alpha T}\dfrac{W_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}f^{\gamma-1}(t)f'(t) \\ U(t,c_t^*)=\dfrac{e^{\alpha(T-t)}e^{\frac{\alpha(T-t)(1-\gamma)}{\gamma}}}{f(t)}.\dfrac{e^{-\alpha T}W_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}f^{\gamma}(t) \end{cases} \qquad (36)$$

در انتها با فاکتور گیری از $\frac{e^{-\alpha T}W_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}f^{\gamma}(t)$ به معادله زیر می‌رسیم:

$$f'(t)+\frac{\left(\lambda(t)-\Psi(\pi^*)\right)}{\gamma}f(t)+e^{\frac{\alpha(T-t)}{\gamma}}=0 \qquad (37)$$

که از حل این معادله دیفرانسیل حدس جواب بدست می‌آید.

لم 1-3: با استفاده از مدل کو و اندازه تصادفی مدل کو استراتژی بهینه از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$0=-\gamma\sigma^2\pi^*+(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2-r)+V(\pi^*) \qquad (38)$$

$$V(\pi^*)=\int_0^1\left[\lambda p\beta_1\left(1+\pi^*t-t\right)^{-\gamma}\left(1-t\right)^{\beta_1+\gamma-2}-\lambda q\beta_2\left(1-\pi^*t\right)^{-\gamma}\left(1-t\right)^{\beta_2-1}\right]t\,dt \qquad (39)$$

اثبات: برای محاسبه استراتژی بهینه که در رابطه 34 بیان شده است، قسمت انتگرال را به دو زیر بازه $(0,\infty)$ و $(-\infty,0)$ تقسیم می‌کنیم که برای قسمت مثبت انتگرال از تغییر متغیر $x=-\ln(1-t)$ و برای قسمت منفی انتگرال

از تغییر متغیر $x=\ln(1-t)$ استفاده می‌کنیم که در نهایت قسمت انتگرالی به بازه $(0,1)$ تبدیل می‌شود. در ادامه این انتگرال را به کمک نرم افزار میپل و با روش انتگرالی گوسی به صورت عددی حل کرده و در بخش نتایج عددی گزارش داده شده است. همچنین تمامی نتایج این لم برای تابع مطلوبیت لگاریتم در حالتی که $\gamma=1$ باشد، برقرار است.

تا به اینجا روش محاسبه استراتژی بهینه را برای مدل کو بیان کردیم. در ادامه در چند مثال به محاسبه نرخ مصرف بهینه برای دو نیروی مرگ و میر معروف بدست می‌آوریم.

مثال **3-1**: فرض می‌کنیم نیروی مرگ و میر دی موآر[33] با بیشترین سن ω به صورت زیر تعریف شود:

$$\lambda(t)=\frac{1}{\omega-x-t},\quad 0<t<\omega \tag{40}$$

در این صورت با استفاده از قضیه **3-1** نرخ مصرف بهینه برای یک شخص با تابع مطلوبیت لگاریتم به صورت زیر است:

$$c_t^*=\frac{(\omega-x)\alpha^2}{\left(1+\alpha t-\alpha(\omega-x)\right)+e^{\alpha t}\left(1+\alpha(\omega-x)\right)}W_t. \tag{41}$$

مثال **3-2**: فرض می‌کنیم تمام مفروضات مثال **3-1** برقرار باشد، در این صورت نرخ مصرف بهینه برای یک شخص با تابع مطلوبیت توانی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$c_t^*=\mathrm{e}^{\frac{\alpha(T-t)}{\gamma}}\frac{W_t}{f(t)}, \tag{42}$$

$$\begin{aligned} f(t)=\xi^{-(\gamma+1)}\left(\frac{2(\omega-x)}{\omega-x-t}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\exp\left(\xi(\omega-x-T)-\frac{\psi(\pi^*)}{\gamma}(T-t)\right) \\ \times\left(\Gamma\left(\gamma+1,\xi(\omega-x-t)\right)-\Gamma\left(\gamma+1,\xi(\omega-x)\right)\right) \end{aligned} \tag{43}$$

مثال **3-3**: فرض می‌کنیم نیروی مرگ و میر گامپرتز[34] به فرم زیر باشد:

$$\lambda(t)=BC^{x+t},\quad t>0 \tag{44}$$

---
[33] De Moivre Force of mortality
[34] Gompertz

که در آن B و C ضرایب ثابت هستند. آنگاه نرخ مصرف بهینه برای شخصی با تابع مطلوبیت لگاریتم برابر است با:

$$c_t^* = \frac{e^{\alpha(T-t)-\frac{BC^{x+t}}{\ln(C)}}\ln(C)}{Ei\left(1,\frac{BC^{x+t}}{\ln(C)}\right)-Ei\left(1,\frac{BC^{x}}{\ln(C)}\right)}W_t. \qquad (45)$$

که در آن Ei انتگرال نمایی می‌باشد.

مثال**4-3**: فرض می‌کنیم تمام مفروضات مثال **3-3** برقرار باشد، در این صورت نرخ مصرف بهینه برای یک شخص با تابع مطلوبیت توانی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$c_t^* = \mathrm{e}^{\frac{\alpha(T-t)}{\gamma}}\frac{W_t}{f(t)}, \qquad (46)$$

$$f(t) = \left(\int_0^t e^{-\frac{(\alpha+\Psi(\pi^*))(T-s)}{\gamma}+\frac{B(C^{x+s}-C^x)}{\gamma\ln(C)}}ds\right)e^{\frac{1}{\gamma}\left(\frac{B(C^{x+s}-C^x)}{\ln(C)}-\Psi(\pi^*)(T-t)\right)} \qquad (47)$$

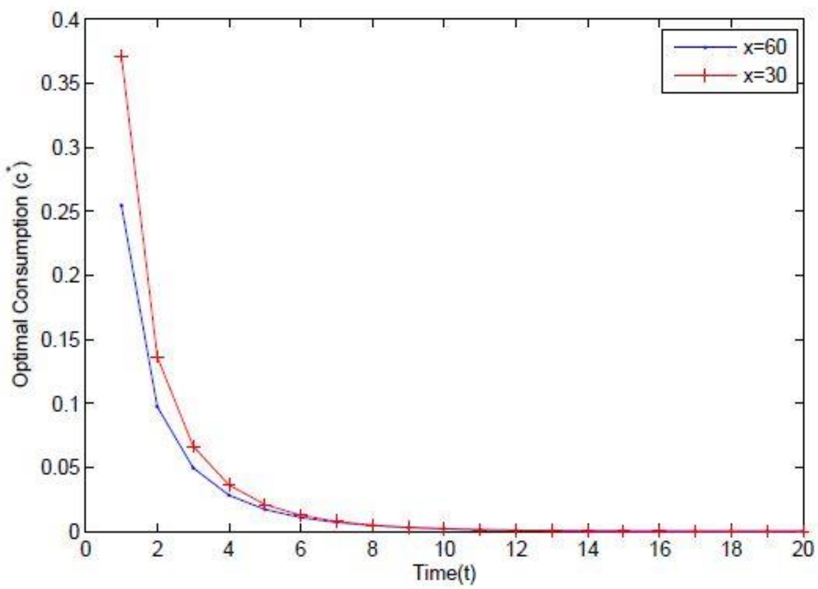
1. تجزیه و تحلیل داده‌ها

در این مقاله یک محصول بیمه عمر به شرط حیات طراحی شده است که بخشی از مزایای آن به دو بازار ریسکی و غیر ریسکی بستگی دارد. برای این منظور با تشکیلی پرتفویی از دو بازار مذکور، استراتژی و نرخ مصرف بهینه محاسبه و در جدول و نمودارهای زیر بیان شده است. نتایج عددی نشان می‌دهد که رفتار نرخ مصرف بهینه همانند مدل مرتون[35] (**1969**، **1975**) می‌باشد، با این تفاوت که در نرخ مصرف بهینه طراحی شده در این مقاله رفتار پرش‌های قیمت کامل مشهود است. نمودارهای **1** -**4** نشان دهنده

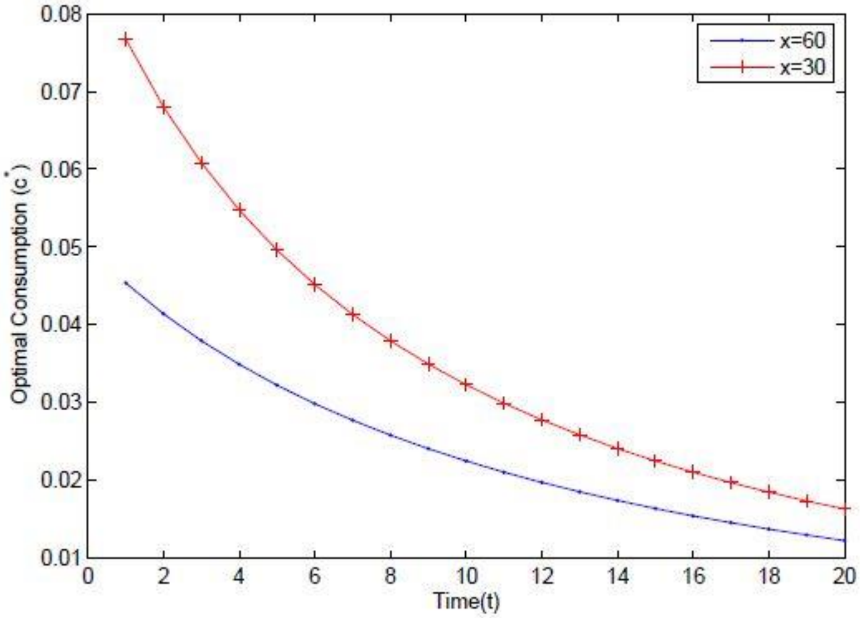
[35] Merton

نرخ مصرف بهینه برای دو سن **30** و **60** برای تابع مطلوبیت **CRRA** می‌باشد. همچنین در جدول **1** استراتژی بهینه برای مدل کو گزارش شده است.

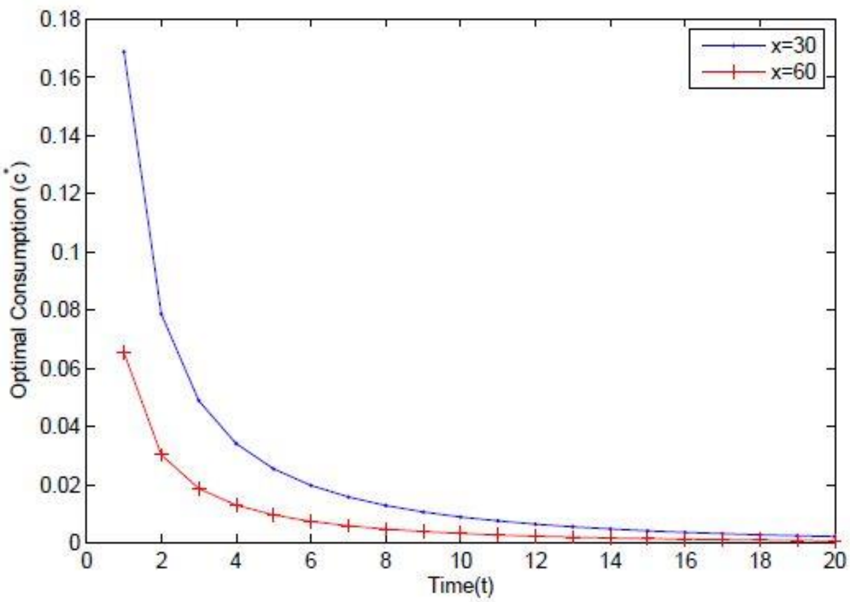
نمودار**1**. رفتار نرخ مصرف بهینه برای مدل مرگ و میر دی موآر را برای تابع مطلوبیت توانی



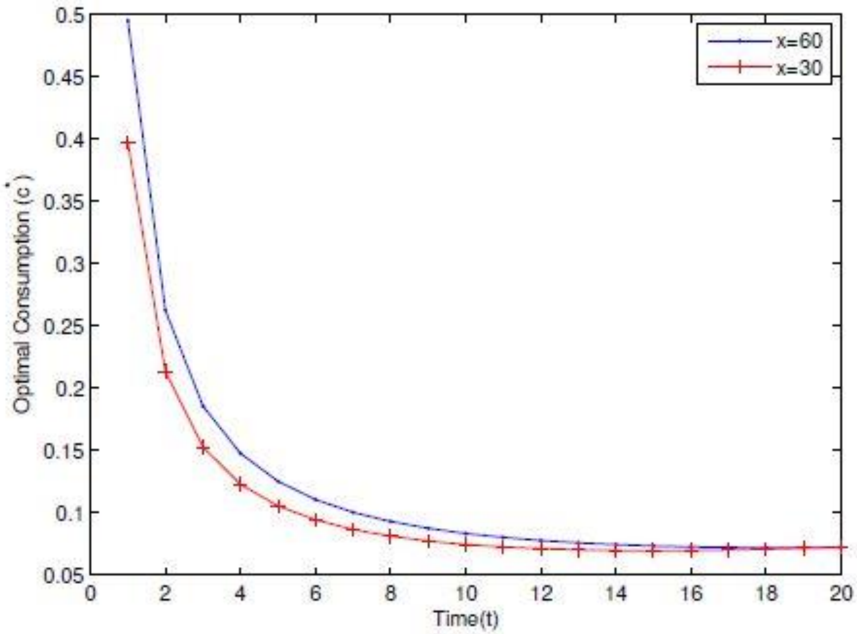
نمودار**2**. رفتار نرخ مصرف بهینه برای مدل مرگ و میر دی موآر را برای تابع مطلوبیت لگاریتم



نمودار3. رفتار نرخ مصرف بهینه برای مدل مرگ و میر گامپرتز را برای تابع مطلوبیت لگاریتم با پارامترهای **C=1.01, B=0.01**



نمودار4. رفتار نرخ مصرف بهینه برای مدل مرگ و میر گامپرتز را برای تابع مطلوبیت توانی با پارامترهای **C=1.01, B=0.01**



در نمودارهای بالا رفتار نرخ مصرف بهینه برای دو تابع مطلوبیت نمایش داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، در نمودار **1** و **4** رفتار نرخ مصرف بهینه برای دو مقدار سن در تابع مطلوبیت توانی بسیار به هم نزدیک بوده و با فاصله کمی حرکت می‌کنند به طوریکه مقدار مصرف بهینه در مدل مرگ و میر دی مو آر برای سن **30** سالگی کمی بیشتر از سن **60** سالگی است. به طور کلی شبیه سازی‌ها نشان می‌دهد که نرخ مصرف در تابع مطلوبیت توانی زیاد به سن افراد بستگی ندارد و مقادیرشان با گذشت زمان به هم نزدیک می‌شوند. در حالی که این نرخ برای مدل مرگ و میر گامپرتز بر عکس بوده عمل می‌کند. در نمودار **2** و **3** نرخ مصرف بهینه برای تابع مطلوبیت لگاریتم را نشان می‌دهد که مقدار نرخ مصرف بهینه دو سن **30** و **60** سالگی از هم بیشتر بوده است. به عبارت دیگر مقدار نرخ مصرف در اینجا به تابع مطلوبیت حساس بوده است. از دید اقتصادی عموماً مصرف کنندگان، هزینه‌های خود را بر مبنای ارزیابی منطقی و آگاهانه از شرایط اقتصادی فعلی و آینده خود، قرار می‌دهند. اغلب شرایط اقتصادی منفی باعث می‌شود که ذات نرخ مصرف برای افراد همواره نزولی باشد. در این مقاله سرمایه گذاری در بازاری انجام می‌شود که قیمت‌ها دارای پرش‌های در دینامیکشان هستند. در حالت کلی نرخ

مصرف تابعی نزولی است. از آنجایی که در نتایج این مقاله پرش‌های منفی وجود دارند، نرخ مصرف رفتار نزولی‌تر به خود می‌گیرید. به طوریکه از زمانی به بعد شاهد پرشی منفی در رفتار نرخ مصرف هستیم.

جدول **1**. استراتژی بهینه سرمایه گذاری برای تابع مطلوبیت توانی با ضریب ریسک گریزی‌های متفاوت.

γ	β	π^*
3	5.3	0.3878
3	6.1	0.3810
5	7.5	0.3213
5	8.2	0.3176
1	6.3	0.6961
1	7.9	0.5917
1	8.4	0.5774

در جدول **1** استراتژی‌های بهینه برای تابع مطلوبیت‌های توانی و لگاریتم گزارش شده است. همانطور که قبلاً بیان شده در حالتی $\gamma=1$ باشد، استراتژی بهینه برای تابع مطلوبیت لگاریتم بوده و در جدول گزارش شده است. نتایج نشان می‌دهد که برای تابع مطلوبیت لگاریتم مقدار استراتژی بهینه بیشتر از تابع مطلوبیت توانی بوده و به عبارت دیگر نسبت سرمایه در بازارهای ریسکی به مراتب بیشتر می‌باشد و بیمه‌شده‌هایی که ریسک پذیرتر هستند برای سرمایه گذاری از تابع مطلوبیت لگاریتم استفاده می‌کنند. همچنین هر اندازه ضریب ریسک گریزی افراد بیشتر باشد، مشارکتشان در سرمایه گذاری در بازارهای ریسکی کمتر می‌باشند.

نتیجه‌گیری و پیشنهادات

در این مقاله با بهره گیری از پرتفویی متشکل از دارایی ریسکی و غیر ریسکی و محاسبه استراتژی بهینه و نرخ مصرف بهینه، یک قرارداد بیمه عمر طراحی کردیم. مطالعه ما بروی یک خانواده از فرآیندهای لوی بوده و تاثیر این فرآیندها بروی استراتژی‌های پرتفو ادامه یافت. در ادامه با استفاده از دو مدل مرگ و میر شناخته شده این نتایج را با هم مقایسه شده است.

امروزه در برخی از شرکت‌های بیمه، محصولاتی در رشته عمر طراحی شده‌اند که برخی از مزایای آن از بازارهای سهام استخراج می‌شود. مطالعاتی که اغلب در این باره انجام می‌شود بسیار تجربی بوده و با استفاده از مشاهدات بازار انجام می‌پذیرد. در چنین شرایطی طراحی مدل‌هایی مانند مدل این مقاله در تصمیم گیری و ارائه خدمات هر

چه بهتر برای مشتریان بسیار حائز اهمیت است و همچنین می‌توانند در بحث پیش بینی رفتار سهام عملکرد بهتری انجام دهند. به عبارت دیگر با استفاده از مدل قیمتی این مقاله، می‌توانند سناریوهای مختلفی طراحی کنند و با توجه به این سناریو بهترین رفتار سرمایه گذاری را در مواقع بحرانی انتخاب کنند. از این رو در صنعت بیمه طراحی چنین مدل‌های بسیار ضروری است.

به عنوان پژوهشی که در ادامه می‌توان به آن پرداخت، استفاده از خانواده معادلات دیفرانسیل تصادفی به عنوان مدلی از شدت مرگ و میر است. همچنین در مدلی کاربردی‌تر به خانواده از مدل‌های دیفرانسیل تصادفی توام اشاره نمود. این دسته از مدل‌ها برای بیمه نامه‌هایی قابل استفاده است به صورت گروهی صادر می‌شود و در این زمینه مطالعات کمی انجام شده است. از نگاه کلی‌تر از این محصولات می‌توان در فروش محصولات بیمه نامه‌های زندگی در شرکت‌های بیمه استفاده نمود.

سپاسگزاری

این مقاله توسط صندوق حمایت از پژوهشگران و فناوران کشور[۳۶] به شماره **(No. 99002421).** مورد حمایت مالی قرار گرفته است. در اینجا بر خود لازم می‌داریم که از این نهاد محترم تشکر و قدردانی به عمل آوریم. همچنین از جناب آقای دکتر مسعود حجاریان به خاطر نکات و نظرات مثبت خود در راستای پیشرفت این اثر تشکر و قدردانی می‌کنیم.

[36] Iran National Science Foundation (INSF)

منابع

Ait-Sahalia, Y., Cacho-Diaz, J., and Hurd, T. R. (2009). Portfolio choice with jumps: A closed-form solution. *Annals of Applied Probability*,19(2), 556--584.

Barigou, K., and Delong, L. (2020). Pricing equity-linked life insurance contracts with multiple risk factors by neural networks. arXiv preprint arXiv:2007.08804.

Ceci, C., Colaneri, K., and Cretarola, A. (2020). Indifference pricing of pure endowments via BSDEs under partial information. *Scandinavian Actuarial Journal,* 2020(10), 904-933.

Ceci, C., Colaneri, K., and Cretarola, A. (2017). Unit-linked life insurance policies: Optimal hedging in partially observable market models. *Insurance: Mathematics and Economics*, (76), 149-163.

Cont, R., and Tankov, P. (2004). Financial Modelling with jump processes. *Chapman and amp*.

Dong, Y., and Zheng, H. (2020). Optimal investment with S-shaped utility and trading and Value at Risk constraints: An application to defined contribution pension plan. *European Journal of Operational Research*, 281 (2), 341--356.

Gerber, H. U. (2013). Life insurance mathematics. Springer Science & Business Media.

Huertas, K. E. A. (2021). Mathematical reserves of unit-linked insurance policies with fractional volatility (Master's thesis).

Kou, S. G. (2002). A jump-diffusion model for option pricing. Management science, 48(8), 1086--1101.

Li, D., Rong, X., and Zhao, H. (2016). Optimal reinsurance and investment problem for an insurer and a reinsurer with jump-diffusion risk process under the Heston model. *Computational and*

Merton, R. C. (1969). Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case. *The review of Economics and Statistics,* 247--257.

Merton, R. C. (1975). Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model. *In Stochastic Optimization Models in Finance*. Academic Press.

Merton, R. C. (1972). Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of financial economics*, 3 (1-2), 125--144.

Wang, Y., Zhang, Z., and Yu, W. (2021). Pricing equity-linked death benefits by complex Fourier series expansion in a regime-switching jump diffusion model. *Applied Mathematics and Computation,* (399), 126031.

Xu, W., and Gao, J. (2020). An Optimal Portfolio Problem of DC Pension with Input-Delay and Jump-Diffusion Process. *Mathematical Problems in Engineering*, 2020, 1--9.

Yao, H., Chen, P., Zhang, M., and Li, X. (2020). Dynamic discrete-time portfolio selection for defined contribution pension funds with inflation risk. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 13 (5), 1--30.

Yaari, M. E. (1965). Uncertain lifetime, life insurance, and the theory of the consumer. *The Review of Economic Studies*, 32 (2), 137-150.

پیوست

در این پیوست کدهای نوشته شده برای نتایج عددی این مقاله با دو نرم افزار **Matlab** و **Maple** پیوست می‌شود. لازم به ذکر است که برای محاسبه استراتژی بهینه از نرم افزار **Maple** و برای نرخ مصرف بهینه از نرم افزار **Matlab** استفاده شده است. در ابتدا کدهای **Matlab** برای چهار نمودار از نرخ مصرف بهینه قرار داده شده است.

```
%%%%%%%%%%%%%%%%% Optimal Consumption for Kou Jump Model%%%%%%%%%%%%%%%%%%
g=8.04; csi=0.3; mu=0.28; sig=0.16; r=0.04; C=1.01; B=0.01;
x=60; xx=30; pi=0.3901; T=20; fiVG=-0.01; a=0.05;
gg=7.15; fiKOU=0.07;
ZaribKou=[0.3463 0.7143 1.1053 1.5209 1.9626 2.4321 2.9312 3.4617 4.0256
4.6252 5.2627 5.9405 6.6614 7.4279 8.2431 9.1102 10.0325 11.0136 12.0574
13.1678];
t=1:1:T;
si=(1-g)*(r+pi*(mu+(0.5*(sig^2))-r)-(0.5*g*((pi*sig)^2)))+fiKOU;
for i=1:length(t)

    X=ZaribKou(i)*exp((1/g)*(((B/log(C))*(C^(x+t(i))-C^x))-si*(T-t(i))));
    XX=ZaribKou(i)*exp((1/gg)*(((B/log(C))*(C^(xx+t(i))-C^xx))-si*(T-t(i))));

    cc(i,:)=exp(a*(T-t(i))/gg)/(XX);
    c(i,:)=exp(a*(T-t(i))/g)/(X);
end
hold on
plot(t,c,'.-')
plot(t,cc,'-+')
ylabel('Optimal Consumption (c^*)')
xlabel('Time(t)')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
g=3.2; csi=0.3; mu=0.28; sig=0.16; r=0.04; w=100; x=60; xx=20; pi=0.3901;
T=20; fiVG=-0.1;; a=0.05;
gg=2.75; fiKOU=0.7;
t=1:1:T;
si=(1-g)*(r+pi*(mu+(0.5*(sig^2))-r)-(0.5*g*((pi*sig)^2)))+fiKOU;
for i=1:length(t)
    X=exp(csi*(w-x-T)-(si*(T-t(i)))/g);
    Y=(csi^(-g-1))*((2*(w-x))/(w-x-t(i)))^(1/g);
    G=gammainc(csi*(w-x),g+1)-gammainc(csi*(w-x-t(i)),g+1);

    XX=exp(csi*(w-xx-T)-(si*(T-t(i)))/gg);
    YY=(csi^(-gg-1))*((2*(w-xx))/(w-xx-t(i)))^(1/gg);
    GG=gammainc(csi*(w-xx),gg+1)-gammainc(csi*(w-xx-t(i)),gg+1);

    cc(i,:)=exp(a*(T-t(i))/gg)/(GG*XX*YY);
    c(i,:)=exp(a*(T-t(i))/g)/(G*X*Y);
end
```

```
hold on
plot(t,c,'.-')
plot(t,cc,'-+')
ylabel('Optimal Consumption (c^*)')
xlabel('Time(t)')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
C=1.01; B=0.01; T=20; x=30; a=0.05; xx=60;
t=1:1:T;
for i=1:length(t)
    X=mfun('Ei',(B*(C^x))/log(C));
    Y=mfun('Ei',(B*(C^(x+t(i))))/log(C));
    Z=exp(a*(T-t(i))-(B*C^(x+t(i)))/log(C))*log(C);

    XX=mfun('Ei',(B*(C^xx))/log(C));
    YY=mfun('Ei',(B*(C^(xx+t(i))))/log(C));
    ZZ=exp(a*(T-t(i))-(B*C^(xx+t(i)))/log(C))*log(C);

    c(i,:)=Z/(Y-X);
    cc(i,:)=ZZ/(YY-XX);
end
hold on
plot(t,c,'.-')
plot(t,cc,'-+')
ylabel('Optimal Consumption (c^*)')
xlabel('Time(t)')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
alpha=0.05; x=60; w=100; xx=30;
t=1:1:20;
for i=1:length(t)
    c(i,:)=((w-x)*(alpha^2))/((1+(alpha*t(i))-alpha*(w-
x))+exp(alpha*t(i))*(1+alpha*(w-x)));

    cc(i,:)=((w-xx)*(alpha^2))/((1+(alpha*t(i))-alpha*(w-
xx))+exp(alpha*t(i))*(1+alpha*(w-xx)));

end
hold on
plot(t,c,'.-')
plot(t,cc,'-+')
ylabel('Optimal Consumption (c^*)')
xlabel('Time(t)')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

در کد زیر استراتژی بهینه محاسبه شده است. روش محاسبه به کمک روش‌های انتگرال گیری که در نرم افزار Maple موجود است، استفاده شده است.

```
> restart :
> with(Student[NumericalAnalysis]) : with(LinearAlgebra) :
```

$\sigma := 0.16:$
$\rho := 0.5:$
$\lambda := 8.8:$
$\eta := 0:$
$\mu := 0.28:$
$r := 0.04:$
$g := 1 : \delta := 8.8 : \chi := 2:$

> $P0 := 0.5:$

> $f := t \rightarrow t \cdot \chi \cdot \left(\delta \cdot \rho \cdot (1 + t \cdot (P - 1))^{-g} \cdot (1 - t)^{\delta + g - 2} - \lambda \cdot (1 - \rho) \cdot (1 - P \cdot t)^{-g} \cdot (1 - t)^{\lambda - 1}\right):$

> $M2 := expand(Quadrature(\mathrm{f(t)}, \mathrm{t} = 0..1, \mathrm{method} = \mathrm{gaussian}[3], \mathrm{partition} = 1, \mathrm{output} = \mathrm{value})):$

> $M22 := expand(Quadrature(\mathrm{f(t)}, \mathrm{t} = 0..1, \mathrm{method} = newtoncotes[3], \mathrm{partition} = 1, output = value)):$

> $equ := P \rightarrow -g \cdot \sigma^2 \cdot P + M2:$

> $Optimal\ Strategy := \left(\mu + 0.5 \cdot \sigma^2 - r\right) + Newton\left(equ(P), P = P0, tolerance = 10^{-2}\right)$