Iran J. Insur. Res., 3(4): 416-431, Autumn 2014, Serial #10

Iranian Journal of Insurance Research
(IJIR)

Homepage: https://ijir.irc.ac.ir/?lang=en

Insurance Research Center (IRC)

ORIGINAL RESEARCH PAPER

Pricing life annuities using the fuzzy technical interest rate

A. Komijani, Sh. Mohammadi, M. Kousheshi, L. Niakan*

Department of Economic Sciences, University of Tehran, Iran

ARTICLE INFO

Article History
Received: 15 April 2014
Revised: 15 May 2014
Accepted: 19 January 2015

Keywords
Life Annuity; Pricing; Interest Rate; Fuzzy Random Variables.

ABSTRACT

Annuity insurance is one of the types of life insurance products in which certain periodic payments are guaranteed until the life of the beneficiary of the policy. In the pricing of life annuities, the uncertainty of demographic phenomena and financial variables should be considered. Uncertainty of demographic phenomena is included in the pricing using the death probabilities of the life table, but usually, financial variables are considered fixed during the contract. In the recent studies of actuarial science, random variables and processes are used to introduce the uncertainty of economic parameters - the most important of which is the technical interest rate. In this article, we develop the pricing of life annuities and combine the random expression of mortality with the fuzzy expression of the technical interest rate so that all sources of uncertainty in the pricing are taken into account. This modeling gives the possibility of quantifying the expected risk arising from the aforementioned sources of uncertainty. Therefore, the modeling of the present value of pensions is provided by the fuzzy random variable, and finally, a numerical example is given.

***Corresponding Author:**
Email: *niakan@irc.ac.ir*
DOI: 10.22056/ijir.2014.04.02

نشریه علمی پژوهشنامه بیمه دوره ۳، شماره ۴، پاییز ۱۳۹۳، شماره پیاپی ۱۰، ص ۴۱۶-۴۳۱

نشریه علمی پژوهشنامه بیمه

سایت نشریه: https://ijir.irc.ac.ir/?lang=fa

مقاله علمی

قیمت‌گذاری مستمری‌های عمر با استفاده از نرخ بهره فنی فازی

اکبر کمیجانی، شاپور محمدی، مجید کوششی، لیلی نیاکان*

گروه علوم اقتصادی، دانشگاه تهران، ایران

اطلاعات مقاله

تاریخ دریافت: ۲۶ فروردین ۱۳۹۳

تاریخ داوری: ۲۵ اردیبهشت ۱۳۹۳

تاریخ پذیرش: ۲۹ دی ۱۳۹۳

کلمات کلیدی

مستمری عمر

قیمت‌گذاری

نرخ بهره

متغیرهای تصادفی فازی

چکیده:

بیمه مستمری یکی از انواع محصولات بیمه عمر است که در آن پرداخت‌های دوره‌ای معینی تا زمان زنده بودن ذی‌نفع بیمه‌نامه تضمین می‌شود. در قیمت‌گذاری مستمری‌های عمر بایستی نااطمینانی پدیده‌های جمعیت‌شناسی و متغیرهای مالی درنظرگرفته‌شود. نااطمینانی پدیده‌های جمعیتی با استفاده از احتمالات فوت جدول عمر در قیمت‌گذاری وارد می‌گردد ولی به‌صورت متداول، متغیرهای مالی در طول قرارداد ثابت درنظرگرفته‌می‌شوند. در مطالعات اخیر دانش بیمه‌سنجی، جهت وارد کردن نااطمینانی پارامترهای اقتصادی - که مهم‌ترین آن نرخ بهره فنی است- از متغیرها و فرایندهای تصادفی استفاده می‌شود. در این مقاله، قیمت‌گذاری مستمری‌های عمر را توسعه داده و بیان تصادفی مرگ‌ومیر را با بیان فازی نرخ بهره فنی ترکیب می‌کنیم تا همگی منابع نااطمینانی در قیمت‌گذاری مورد توجه قرار گیرد. این مدل‌بندی، امکان کمیت‌پذیر کردن ریسک انتظاری ناشی از منابع عدم حتمیتِ مورد اشاره را به‌دست‌می‌دهد. از این رو، مدل‌بندی ارزش حال مستمری‌ها توسط متغیر تصادفی فازی ارائه می‌شود و در نهایت، یک مثال عددی بیان می‌گردد.

***نویسنده مسئول:**

ایمیل: niakan@irc.ac.ir

DOI: 10.22056/ijir.2014.04.02

مقدمه

بیمه عمر[1] از مهم‌ترین رشته‌های بیمه‌های اشخاص است. ایده اصلی در بیمه عمر آن است که بیمه‌گذار[2] در این بیمه‌نامه[3] حق‌بیمه[4] می‌پردازد و در عوض، شرکت بیمه سرمایه مشخصی[5] را در صورت فوت بیمه‌شده[6] یا زنده ماندن او در زمان معینی به بیمه‌گذار یا شخص ثالث تعیین شده از طرف وی می‌پردازد. بنابراین، تعهدات بیمه عمر تابعی از طول عمر انسان است. محصولات متعددی از بیمه‌های عمر وجود دارد که از جمله آن بیمه عمر مستمری[7] است. بیمه عمر مستمری شامل دنباله‌ای از پرداخت‌هاست که تا زمانی که ذی‌نفع زنده است، پرداخت می‌شود؛ بنابراین، یک قرارداد بیمه عمر مستمری می‌تواند به‌عنوان یک مقرری قطعی در دوره زمانی باقی‌مانده عمر شخص تلقی شود. این بیمه‌نامه به‌ظاهر ساده، مسائل و مشکلاتی دارد که حل آن بر عهده دانش بیمه‌سنجی[8] است. بیمه‌سنج با استفاده از تجارب سال‌های قبل – آمارهای پیشین- نسبت به ایجاد مدل‌های ریاضی که به‌وسیله آنها بتوان ریسک‌های موجود در هر بیمه‌نامه و حق‌بیمه متناسب با آن را محاسبه کرد، اقدام می‌کند.

بیمه‌سنج برای قیمت‌گذاری مستمری‌های عمر باید نااطمینانی پیشامدهای جمعیتی و متغیرهای مالی را مدل‌سازی کند. در ریاضیات بیمه عمر استاندارد، نااطمینانی تصادفی پدیده‌های جمعیتی مورد توجه قرار گرفته و احتمالات مربوطه از جدول عمر به‌دست‌می‌آید (Gerber, 1995).

در کلیه مقالات علم بیمه‌سنجی در حوزه قیمت‌گذاری، تصادفی‌بودن ارزش حال حق‌بیمه‌ها و منافع بیمه‌نامه به‌صورت امید ریاضی آنها بیان شده و به این ترتیب، فرایندها قطعی و معین می‌شوند. این رویکرد امکان قیمت‌گذاری قراردادهای بیمه با توجه به نااطمینانی متغیرهای مالی را فراهم می‌کند. مهم‌ترین متغیر مالی در محاسبه حق‌بیمه، نرخ بهره است. نوسانات و تغییرات نرخ بهره در نتیجه اِعمال سیاست‌های مختلف پولی، مالی و ارزی دولت، منافع بیمه‌گران و حق‌بیمه بیمه‌گذاران بیمه عمر را دستخوش نااطمینانی می‌کند.

در حوزه علم بیمه‌سنجی، تئوری مجموعه فازی برای مدل‌سازی مسائلی به‌کارمی‌رود که نیازمند قضاوت ذهنی بیمه‌سنج بوده یا اطلاعات در دسترس اندک یا مبهم است. یکی از این کاربردها، قیمت‌گذاری قراردادهای بیمه عمر با نرخ بهره فازی است که بدین ترتیب، اکچوئری می‌تواند نااطمینانی متغیر مالی نرخ بهره را در قیمت‌گذاری مورد توجه قرار دهد. فرض می‌شود که نرخ بهره (نرخ تنزیل) توسط اعداد فازی توصیف می‌گردد. این رویکرد امکان وارد کردن هم‌زمان منابع نااطمینانی تصادفی و فازی از جانب پیشامدهای جمعیتی و متغیرهای مالی را فراهم می‌سازد.

هدف از ارائه این مقاله، معرفی رویکرد فازی در حوزه بیمه از طریق قیمت‌گذاری محصول مستمری‌های عمر است. برای این منظور، نرخ بهره فنی مورد استفاده در قیمت‌گذاری محصول را یک متغیر فازی درنظرمی‌گیریم که در نتیجه، نرخ حاصله نیز یک عدد فازی تصادفی خواهد بود. اعداد فازی تصادفی به بیانی همان اعداد قطعی هستند که در بازه‌ای تصادفی تغییر می‌کنند. بدین‌ترتیب امکان تصمیم‌سازی در یک محدوده متغیر فراهم خواهد شد.

مروری بر پیشینه پژوهش

بیمه‌سنج‌ها به‌طور سنتی از یک رویکرد قطعی در اغلب محاسبات بیمه‌ای خود استفاده کرده و نرخ بهره را ثابت فرض می‌کردند، اما در عمل و به‌ویژه در قراردادهای بلندمدت، نرخ بهره ثابت نیست. یکی از اولین مقالاتی که بازدهی دارایی و درنتیجه، بازدهی پورتفوی دارایی را به‌عنوان متغیر تصادفی درنظر می‌گیرد، مقاله معروف مارکویتز[9] است. این ایده سال‌ها در زمینه علم بیمه‌سنجی مورد توجه قرار نگرفت.

---

[1]. Life Insurance
[2]. Policy Holder
[3]. Policy
[4]. Premium
[5]. Sum Insured
[6]. Insured
[7]. Life Annuity
[8]. دانش بیمه‌سنجی، ریاضیات و آمار، بیمه، اقتصاد و علوم رایانه‌ای را به یکدیگر پیوند می‌زند تا ریسک‌های موجود در صنعت بیمه و بازارهای مالی را بررسی و ارزیابی کند و بیمه‌سنج متخصصی است که به ارزیابی این ریسک‌ها می‌پردازد و سرمایه مورد نیاز برای پوشش این ریسک‌ها را محاسبه می‌کند.
[9]. Markowitz, 1952

از جمله اولین مقالات در حوزه بیمه‌سنجی که با رویکرد نرخ بهره تصادفی نگاشته شده، می‌توان به مقاله دی پائولو[۱] اشاره کرد. پائولو با استفاده از آمارهای تاریخی، یک توزیع احتمال برای بازدهی تعریف کرد. این توزیع، منعکس‌کننده نااطمینانی سرمایه‌گذاری است.
پس از آن کان[۲] در مقاله خود فرض کرد بازدهی پورتفوی سرمایه‌گذاری پایه دارای توزیع لوگ‌نرمال[۳] است. توزیع لوگ‌نرمال از دو ویژگی اساسی برخوردار است: کاربرد آن آسان است و شواهد تجربی بسیاری آن را به‌عنوان یک مدل مناسب برای بازدهی پورتفولیو معرفی می‌کنند (Lintner, 1972). کان از این رویکرد در محاسبه گشتاورهای هزینه تضمین‌های سررسید در بیمه‌نامه بیمه تمام عمر استفاده کرد.
زیوک[۴] از تکنیک‌های سری زمانی و شبیه‌سازی در مدل‌سازی تصادفی عایدی اوراق قرضه استفاده کرد.
بویلی[۵] در مقاله‌اش فرض کرد که بازدهی‌های سالانه توسط یک فرایند تصادفی مستقل ایجاد می‌شوند که این توزیع در طول زمان ثابت باقی می‌ماند. او فرض کرد که بازدهی یک‌ساله در هر سال دارای توزیع لوگ‌نرمال است، بنابراین لگاریتم بازدهی سالانه دارای میانگین و واریانس ثابت می‌باشد. وی سپس گشتاورهای سه‌گانه توابع بیمه‌سنجی تحت فرض نرخ بهره تصادفی را محاسبه کرد. این محاسبات در کاربردهای نرخ بهره مرکب در توابع بیمه‌سنجی مورد استفاده قرار می‌گیرد.
پانجر و بلهاوس[۶] در مقاله خود از یک رویکرد تصادفی برای بیان گشتاورهای جریانات نقدی معین و تصادفی در مستمری‌های عمر استفاده کردند. در این مقاله ارزش انتظاری عامل تنزیل به‌عنوان تابع گشتاورساز از توابع نرخ بهره درنظرگرفته‌می‌شود. در این مطالعه تابع نرخ بهره به‌صورت نرمال (گوسی) درنظرگرفته‌شده و سپس مدل بسط می‌یابد تا فرایند تصادفی نرخ بهره را به مقادیر جاری و گذشته مشروط کند. برای این منظور از مدل نرخ بهره خودرگرسیونی شرطی[۷] گسسته در توابع مستمری و بیمه استفاده می‌شود. این رویکرد مشابه فرایند تصادفی زمانی در کار بویلی است که نرخ عایدی سالانه را با استفاده از یک فرایند خودرگرسیونی مرتبه اول (AR(1)) تعیین می‌کند.
بیکمن و فیولینگ[۸] از یک فرایند تصادفی وینری[۹] برای مدل‌سازی نرخ بهره و طول عمر آتی تصادفی در یک مستمری معین استفاده کردند. آنها فرض کردند که در یک مستمری معین، در طول مستمری نوساناتی در نرخ بهره رخ می‌دهد. سپس این مدل اولیه را با مدلی ترکیب کردند که در آن طول مستمری و به‌عبارت‌دیگر، مدت زمان باقی‌مانده عمر بیمه‌گذار یک متغیر تصادفی است. در این مقاله مقدار میانگین و انحراف استاندارد ارزش حال پرداخت‌های احتمالی و احتمالات مرزی متقاطع فرایند تصادفی وینری محاسبه شده است.
کامینز و دریگ[۱۰] با استفاده از تئوری مجموعه فازی به حل مسئله قیمت‌گذاری مالی قراردادهای بیمه مسئولیت و اموال پرداختند. تئوری مجموعه فازی دربرگیرنده قواعد ریاضی است که می‌تواند از اطلاعات مبهم، ذهنی و قضاوتی در فرایندهای تصمیم‌گیری پیچیده استفاده کند. ازآنجاکه در قیمت‌گذاری بیمه، اطلاعات درمورد جریانات نقدی[۱۱]، شرایط اقتصادی آینده، صرف ریسک[۱۲] و سایر عوامل موثر بر تصمیمات قیمت‌گذاری ذهنی بوده و درنتیجه، کمّی‌کردن آنها با استفاده از روش‌های مرسوم کار مشکلی است، استفاده از تئوری مجموعه فازی می‌تواند به این امر کمک کند. آنها از فازی‌سازی یک مدل قیمت‌گذاری مالی بیمه‌ای برای قیمت‌گذاری محصولات بیمه‌ای و از قواعد فازی برای تصمیم‌گیری پروژه استفاده کردند. نتایج بررسی کامینز و دریگ نشان می‌دهد که استفاده از تئوری مجموعه فازی نسبت به رویکرد متداول، تفاوت‌های اساسی در تصمیم‌گیری ایجاد می‌کند.
سانچز و پوچادس[۱۳] با بیان تصادفی مرگ‌ومیر و بیان فازی نرخ بهره، قیمت‌گذاری مستمری‌های عمر را توسعه دادند. در قیمت‌گذاری مستمری‌های عمر، بایستی نااطمینانی پیشامدهای جمعیتی و متغیرهای مالی مدل‌سازی شوند. در این مقاله برای پیشامدهای جمعیتی، از نااطمینانی تصادفی استفاده می‌شود و احتمالات مربوطه از جدول عمر محاسبه می‌گردد. متغیرها و فرایندهای تصادفی را می‌توان برای ترسیم

1. Di Paolo, 1969
2. Kahn, 1971
3. Lognormal
4. Ziock, 1973
5. Boyle, 1976
6. Panjer and Bellhouse, 1981
7. Conditional Autoregressive
8. Beekman and Fuelling, 1992
9. Wiener Stochastic Process
10. Cummins and Derrig, 1997
11. Cash Flows
12. Risk Premium
13. Sanchez and Puchades, 2012

نااطمینانی پارامترهای اقتصادی به‌کاربرد. در حوزه بیمه‌سنجی، تئوری مجموعه فازی برای مدل‌سازی مسائلی به‌کارمی‌رود که نیازمند قضاوت ذهنی بیمه‌سنج است یا اطلاعات موجود، کمیاب یا مبهم است. یکی از کاربردهای تئوری مجموعه فازی در قیمت‌گذاری قراردادهای بیمه با نرخ بهره فازی است. آنها نشان دادند که مدل‌سازی ارزش حال مستمری‌ها با متغیرهای تصادفی فازی، امکان کمّی‌کردن قیمت انتظاری قراردادهای مستمری و ریسک ناشی از منابع مختلف نااطمینانی را فراهم می‌کند. سپس با استفاده از میانگین و واریانس متغیرهای تصادفی فازی، قیمت و ریسک پورتفویی از مستمری‌ها محاسبه شده است.

مبانی نظری پژوهش

مبانی نرخ‌گذاری در بیمه‌های عمر

نرخ[۱] بیمه، قیمت هر واحد بیمه است که همانند هر محصول دیگری تابعی از هزینه تولید می‌باشد. در صنعت بیمه، برخلاف سایر صنایع، هزینه تولید در زمان فروش قرارداد معلوم نیست و تا زمانی در آینده مشخص نخواهد شد. بنابراین، قیمت‌گذاری بیمه مبتنی بر پیش‌بینی خواهد بود. فرایند پیش‌بینی خسارات و هزینه‌های آتی و تخصیص این هزینه‌ها میان طبقات مختلف بیمه‌شدگان را نرخ‌گذاری گویند. نرخ‌گذاری در یک شرکت بیمه عمر توسط بخش بیمه‌سنجی شرکت یا یک شرکت مشاور بیمه‌سنجی انجام می‌شود. نرخ حق‌بیمه باید در طول زمان نسبتاً پایدار بوده و در عین حال پاسخ‌گوی تغییر در شرایط وقوع خسارت باشد. حق‌بیمه از ضرب نرخ بیمه در تعداد واحدهای پوشش خریداری شده به‌دست‌می‌آید. حق‌بیمه تعیین‌شده باید پوشش‌دهنده خسارات و هزینه‌های شرکت باشد. حق‌بیمه نهایی که توسط بیمه‌شده پرداخت می‌شود، حق‌بیمه ناخالص[۲] نام دارد. نرخ ناخالص از دو قسمت تشکیل می‌شود: بخش حق‌بیمه خالص[۳] برای پوشش خسارات و بخش سربار[۴] برای پوشش هزینه‌های عملیاتی. برای انواع بیمه، حق‌بیمه خالص از تقسیم خسارت انتظاری به تعداد افراد در معرض خسارت به‌دست‌می‌آید.

در نرخ‌گذاری انواع محصولات بیمه عمر سه عنصر اصلی وارد می‌شود:

– احتمال مرگ‌ومیر[۵]؛

– نرخ بهره[۶]؛

– هزینه سربار.

دو عنصر مرگ‌ومیر و نرخ بهره در محاسبه حق‌بیمه خالص وارد می‌شوند که تنها هزینه خسارات را محاسبه کرده و هزینه‌های اجرایی شرکت بیمه را درنظرنمی‌گیرند. مجموع حق‌بیمه خالص و هزینه سربار، حق‌بیمه ناخالص را تشکیل می‌دهد که همان قیمت فروش بیمه‌نامه است.

جدول عمر اصلی‌ترین پایه محاسبه حق‌بیمه است. در واقع، ازآنجاکه حق‌بیمه پرداختی توسط بیمه‌گذار متناسب با تعهدات بیمه‌گر در مقابل فوت بیمه‌شده یا رسیدن وی به سن معینی است، می‌بایست بیمه‌گر از احتمال فوت یا زنده ماندن بیمه‌شده در سنین مختلف آگاهی داشته باشد.

عنصر دیگر در محاسبه حق‌بیمه‌های عمر - با توجه به فاصله زمانی میان پرداخت حق‌بیمه‌ها از سوی بیمه‌گذار و پرداخت سرمایه از سوی بیمه‌گر- نرخ بهره است. در کلیه بیمه‌نامه‌های عمر، پرداخت حق‌بیمه قبل از اجرایی شدن قرارداد صورت می‌گیرد، درحالی‌که منافع آن در زمانی در آینده پرداخت خواهد شد. ازآنجاکه حق‌بیمه‌ها از پیش دریافت شده و خسارات و غرامات در تاریخی در آینده پرداخت می‌گردد، بیمه‌گر از انباشت حق‌بیمه‌ها برای سرمایه‌گذاری استفاده کرده و بنابراین، باید بهره‌ای به بیمه‌گذار تعلق گیرد. با توجه به این مسئله، نیازی

[1]. Rate
[2]. Gross Premium
[3]. Pure Premium
[4]. Loading
[5]. Mortality Probability
[6]. Interest

نیست که بیمه‌گر کل خسارت آتی را از بیمه‌گذاران دریافت کند. براین اساس، مفهوم ارزش حال[1] یک واحد پولی آتی در محاسبه حق‌بیمه اهمیت دارد.

برای تبدیل حق‌بیمه خالص به نرخ ناخالص (تجاری) باید هزینه سربار را به آن افزود تا هزینه‌های مربوط به ارائه محصول و خدمات بیمه‌ای نیز پوشش داده شود. تعیین هزینه سربار اساساً مربوط به حسابداری هزینه است و انواع مخارج مربوط به فراهم‌سازی محصول را شامل می‌شود: حق کمیسیون[2] (کارمزد)، سایر مخارج فروش، مخارج عمومی اداری، مالیات بر حق‌بیمه، سود و حوادث محتمل‌الوقوع[3].

مبانی محاسباتی بیمه عمر مستمری

در ارزیابی پرداخت مستمری سالیانه که در پایان هر سال پرداخت می‌شود، این احتمال وجود دارد که یک یا چند پرداخت در این مستمری صورت نگیرد. بنابراین، بیمه‌سنج‌ها مجموعه‌ی پرداخت‌ها را ارزش‌گذاری می‌کنند، درحالی‌که از تعداد پرداخت‌هایی که صورت خواهد گرفت، اطمینان ندارند و حتی اگر از تعداد پرداخت‌ها اطمینان داشته باشند، از مقدار آن مطمئن نیستند. برای این منظور، چهارچوبی برای ارزشیابی سلسله پرداخت‌های احتمالی ارائه خواهد شد.

یکی از انواع متداول پرداخت، مستمری است که در آن دنباله‌ای از پرداخت‌ها با فواصل منظم زمانی انجام می‌شود. نمونه متعارف چنین پرداخت‌هایی، پرداخت حق‌بیمه در بیمه‌های عمر و سرمایه‌گذاری و اقساط ماهیانه وام خرید مسکن است.

نماد $a_{\overline{n}|}^{i}$ نشان‌دهنده ارزش حال دنباله پرداخت‌های یک واحدی است که در پایان هر دوره و برای n دوره صورت می‌گیرد. این مقدار تحت نرخ بهره موثر i برای هر دوره محاسبه می‌شود. چنین مستمری را مستمری ته فصلی[4] گویند.

برای محاسبه $a_{\overline{n}|}^{i}$ ارزش حال هر یک از پرداخت‌ها را محاسبه و آنها را تجمیع می‌کنیم (گربر، ۱۳۹۰):

$$a_{\overline{n}|}^{i} = v + v^{2} + v^{3} + \ldots + v^{n} \tag{۱}$$

که در آن، v (که از رابطه $v = \frac{1}{1+i}$ محاسبه می‌شود) ارزش حال قسط اول در پایان اولین دوره، v^{2} ارزش حال قسط دوم در پایان دومین دوره و ... است. پس از انجام محاسبات ریاضی داریم:

$$a_{\overline{n}|}^{i} = \frac{1-v^{n}}{i} \tag{۲}$$

می‌توان نشان داد که برای هر مقدار غیر صفر i، با افزایش مقدار n (دوره اقساط) مقدار $a_{\overline{n}|}^{i}$ به سمت یک مقدار حدی میل می‌کند:

$$\lim_{n\to\infty} a_{\overline{n}|}^{i} = \frac{1-v^{n}}{i} = \frac{1}{i} \tag{۳}$$

بنابراین، ارزش حال مستمری مادام‌العمر[5] که اقساطی است که برای مدت نامحدودی در پایان هر دوره پرداخت می‌شود، به‌صورت $a_{\overline{\infty}|}^{i}$ نمایش داده شده و برابر با $\frac{1}{i}$ است.

به مستمری که در آغاز هر دوره پرداخت می‌گردد، مستمری حال (سرفصلی)[6] گفته می‌شود. علامت $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ نشانگر ارزش حال دنباله پرداخت‌های یک واحدی در ابتدای هر یک از n دوره آتی است. ارزش مقدار $\ddot{a}_{\overline{n}|}^{i}$ از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

---

1. Present Value
2. Commissions
3. Contingencies
4. Annuity in Arrear
5. Perpetuity
6. Annuity Due

$$\ddot{a}^{i}_{\overline{n}|}=1+v+v^{2}+\ldots+v^{n-1}=(1+i)a^{i}_{\overline{n}|}=1+a^{i}_{\overline{n-1}|}=\frac{1-v^{n}}{d},d=1-v \quad (۴)$$

مستمری بافاصله یا تأخیری[۱] (معوق)، دنباله پرداخت‌هایی است که پس از یک یا چند دوره تأخیر که طی آن هیچ پرداختی صورت نمی‌گیرد، آغاز می‌شود. علامت $m|a^{i}_{\overline{n}|}$ بیانگر ارزش حال یک مستمری معوق n دوره‌ای است که پس از m دوره آغاز می‌شود. به‌عبارتی، نخستین پرداخت در دوره m+1 انجام می‌گیرد:

$$m|a^{i}_{\overline{n}|}=v^{m+1}+v^{m+2}+\ldots+v^{m+n}=v^{m}\frac{1-v^{n}}{i}=a^{i}_{\overline{m+n}|}-a^{i}_{\overline{m}|} \quad (۵)$$

بیمه عمر مستمری شامل دنباله‌ای از پرداخت‌هاست که تا زمانی که ذی‌نفع (با سن x در زمان عقد قرارداد) زنده است، پرداخت می‌شود. به‌عبارتی، یک قرارداد بیمه عمر مستمری می‌تواند به‌عنوان یک مقرری قطعی در دوره زمانی باقی‌مانده عمر شخص ارائه شود. ارزش حال این مستمری را با y نشان می‌دهیم که یک متغیر تصادفی است. امید ریاضی ارزش حال این مستمری، E(y) برابر با تک حق‌بیمه خالص معادل آن خواهد بود که در محاسبه آن احتمالات مربوطه از جدول عمر استخراج می‌گردد (اتکینسن و دیکسون، ۱۳۹۱).

محاسبات بیمه مستمری عمر در شرایط فازی

اصل برابری[۲] کلاسیک بیان می‌کند زمانی که امید ریاضی ارزش حال متغیرهای تصادفی حق‌بیمه‌ها و منافع بیمه‌های عمر بر هم منطبق باشند، برابری بیمه‌سنجی مالی بین حق‌بیمه‌ها و منافع وجود دارد. تحقیقاتی که در حوزه تحلیل بیمه‌سنجی فازی هستند، از اصل برابری کلاسیک همراه با نرخ بهره فازی استفاده می‌کنند (Betzuen et al., 1997). تصادفی‌بودن ارزش حال حق‌بیمه‌ها و منافع بیمه‌نامه توسط امید ریاضی آنها نشان داده می‌شود. ریاضیات مالی استاندارد را می‌توان با پارامترهای تخمین‌زده‌شده به‌صورت اعداد فازی توسعه داد. استفاده از نرخ تنزیل فازی و بیان ارزش حال حق‌بیمه‌ها و منافع قراردادهای بیمه عمر به‌صورت متغیرهای تصادفی فازی باعث می‌شود ویژگی تصادفی بودن مرگ‌ومیر نیز در مدل لحاظ شود. به این ترتیب می‌توان ارزش انتظاری یک بیمه‌نامه عمر را به‌دست‌آورد.

در بسیاری از مسائل بیمه‌سنجی، محقق با ارزیابی یک پرداخت ثابت یا دنباله‌ای از پرداخت‌ها در آینده و بنابراین، فرایند تنزیل سروکار دارد. این پرداخت‌ها به وقایع محتمل‌الوقوع نظیر زنده‌ماندن فرد بستگی دارد. در رویکرد متداول بیمه‌سنجی، ارزش انتظاری هر پرداخت آتی تحت نرخ بهره مناسب تنزیل می‌شود. اما در بسیاری از کاربردهای بیمه‌سنجی به‌ویژه در مسائل مرتبط با پرداخت‌های تضمین‌شده در آینده، مناسب است که از نرخ تنزیل تصادفی استفاده شود؛ زیرا نرخ تنزیل تصادفی بهتر می‌تواند بازدهی نامطمئن دارایی‌ها را نشان دهد (Boyle, 1976).

همانگونه که اشاره شد، در قیمت‌گذاری قراردادهای مستمری عمر دو منبع نااطمینانی رفتار مرگ‌ومیر و تغییرات نرخ بهره در طول زمان باید وارد شود. با مدل‌سازی تصادفی نااطمینانی مرگ‌ومیر با استفاده از جدول عمر، برای مدل‌سازی نااطمینانی نرخ بهره می‌توان از متغیرها و فرایندهای تصادفی و همچنین اعداد فازی استفاده کرد.

استفاده از نرخ تنزیل فازی و بیان ارزش حال حق‌بیمه‌ها و منافع قراردادهای بیمه عمر به‌صورت متغیرهای تصادفی فازی[۳] باعث می‌شود ویژگی تصادفی‌بودن مرگ‌ومیر نیز در مدل حفظ شود. به این ترتیب می‌توان ارزش انتظاری یک بیمه‌نامه عمر را به‌دست‌آورد.

یک مستمری عمر معوق m ساله برای یک واحد مرگ‌ومیر[۴] در هر سال، قابل پیش‌پرداخت[۵] در طول n سال برای شخص بیمه‌شده با سن x درنظر بگیرید. باید توجه داشت که تعریفی که ارائه می‌شود، مستمری‌های عمر فوری (آنی)[۶] و مستمری‌های تمام‌عمر[۷] را نیز شامل می‌شود. اگر مستمری فوری باشد، m=0 می‌شود و اگر مستمری تمام عمر باشد، $n=\varpi-m+1$ است که ϖ حداکثر سن قابل حصول در جدول مرگ‌ومیر می‌باشد. فضای پیشامدها $\Omega=\{\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_{n-1},\omega_n\}$ است که ω_0 نشانگر این پیشامد است که بیمه‌شده در طول m سال آینده می‌میرد (و در

---

1. Deferred Annuity
2. Equivalence Principle
3. Fuzzy Random Variables
4. Mortality Unit (M.U)
5. Prepayable
6. Immediate Life Annuities
7. Whole Life Annuities

نتیجه، هیچ مستمری دریافت نمی‌کند)، ω_j نشانگر این پیشامد است که بیمه‌شده در سال m+jاُم از مستمری فوت می‌شود (و درنتیجه، j مستمری اول را دریافت می‌کند) (j=1,2,...,n-1) و ω_n نشانگر این پیشامد است که بیمه‌شده m+n-1 سال زنده می‌ماند (و در نتیجه، همه مستمری‌ها را دریافت می‌کند).

به‌طور کلی، داده‌های قطعی (غیر فازی) را می‌توان با اضافه‌کردن یک عدد $\pm\theta$ به هر مقدار، تبدیل به داده‌های فازی کرد که θ نسبت به مقادیر مرکزی کوچک انتخاب می‌شود. انتخاب θ اختیاری بوده یا از طریق اعداد تصادفی تولید می‌شود (Chang and Ayyub, 2001).

با استفاده از بیان فازی برای نرخ تنزیل، $\tilde{d}_t$، می‌توان متغیر تصادفی فازی ارزش حال مستمری معوق m ساله برای مدت n سال و برای یک فرد x ساله، ${}_{m|n}\tilde{a}_x$ را ایجاد کرد.

تخمین نرخ بهره مؤثر به‌صورت عدد فازی $\tilde{i}$ با تابع عضویت $\mu_{\tilde{i}}(z)$ و برش‌های آلفای $[\underline{i}_\alpha, \overline{i}_\alpha]$ می‌باشد. با استفاده از $\tilde{i}$ می‌توان فاکتور تنزیل برای یک واحد مرگ‌ومیر، قابل پرداخت در t سال را چنین محاسبه کرد:

$$\tilde{d}_t = (1+\tilde{i})^{-t} \tag{۶}$$

و با توجه به اینکه عامل تنزیل، تابعی کاهنده از نرخ بهره است، برش‌های آلفای $\tilde{d}_t$ برای ∀α∈[0,1] چنین تعریف می‌شود:

$$d_{t\alpha} = [\underline{d}_{t\alpha}, \overline{d}_{t\alpha}] = [(1+\overline{i}_\alpha)^{-t}, (1+\underline{i}_\alpha)^{-t}] \tag{۷}$$

بنابراین، ارزش حال مستمری معوق به‌صورت زیر بیان خواهد شد:

$$\begin{aligned} &{}_{m|n}\tilde{a}_x : \Omega \to F(R) \\ &\forall \omega \in \Omega \to {}_{m|n}\tilde{a}_x(\omega) = \{(z, \mu_{{}_{m|n}\tilde{a}(x)}(z)) \mid z \in F(R)\} \end{aligned} \tag{۸}$$

باید توجه داشت که نتایج ارزش حال مستمری‌ها به‌دلیل وابستگی به سن فوت بیمه‌شده تصادفی بوده و ازسوی‌دیگر، این نتایج اعداد فازی هستند، زیرا با نرخ‌های تنزیلی محاسبه می‌شوند که در یک بازه تعمیم‌یافته قرار می‌گیرند. این متغیر تصادفی فازی، اعداد فازی زیر را با احتمالات مربوطه‌ی p اتخاذ می‌کند (Sanches and Puchades, 2012):

نتایج[1]	p
0	${}_m q_x$
$\sum_{t=m}^{m+r-1} \tilde{d}_t$	$m+r-1 \vert q_x, r=1,2,\dots,n-1$
$\sum_{t=m}^{m+n-1} \tilde{d}_t$	${}_{m+n-1} p_x$

متغیر تصادفی فازی ${}_{m|n}\tilde{a}_x$، ∀α∈[0,1] متغیرهای اینفیما[2] و سوپرمای[3] $\underline{{}_{m|n}\tilde{a}_x}_\alpha$ و $\overline{{}_{m|n}\tilde{a}_x}_\alpha$ را چنین تعریف می‌کند:

نتایج برای $\underline{{}_{m\|n}\tilde{a}_x}_\alpha$	p
0	${}_m q_x$
$\sum_{t=m}^{m+r-1} \underline{d}_{t\alpha}$	$m+r-1 \vert q_x, r=1,2,\dots,n-1$
$\sum_{t=m}^{m+n-1} \underline{d}_{t\alpha}$	${}_{m+n-1} p_x$

1. Outcomes
2. Infima Variable
3. Suprema Variable

نتایج برای ${}_{m\|n}\tilde{a}_{x\alpha}$	p
0	${}_{m}q_{x}$
$\sum_{t=m}^{m+r-1}\overline{d}_{t\alpha}$	${}_{m+r-1\|}q_{x}, r=1,2,...,n-1$
$\sum_{t=m}^{m+n-1}\overline{d}_{t\alpha}$	${}_{m+n-1}p_{x}$

براساس تعاریف ارائه‌شده در قسمت‌های قبل، مقادیر زیر را می‌توان تعیین کرد:

- برش‌های آلفای امید ریاضی متغیر تصادفی فازی $\forall\alpha\in[0,1],\ {}_{m|n}\tilde{a}_{x}$ به‌صورت $E({}_{m|n}\tilde{a}_{x})=[\underline{\mathrm{E}({}_{m|n}\tilde{a}_{x})_{\alpha}},\overline{\mathrm{E}({}_{m|n}\tilde{a}_{x})_{\alpha}}]$ با مقادیر زیر:

$$\underline{\mathrm{E}({}_{m|n}\tilde{a}_{x})_{\alpha}}=\mathrm{E}(\underline{{}_{m|n}\tilde{a}_{x\alpha}})=\sum_{s=m}^{m+n-2}\sum_{t=m}^{s}\underline{d_{t\alpha}}\cdot{}_{s|}q_{x}+\sum_{t=m}^{m+n-1}\underline{d_{t\alpha}}\cdot{}_{m+n-1}p_{x}=\sum_{t=m}^{m+n-1}\underline{d_{t\alpha}}\cdot{}_{t}p_{x} \quad (۹)$$

$$\overline{\mathrm{E}({}_{m|n}\tilde{a}_{x})_{\alpha}}=\mathrm{E}(\overline{{}_{m|n}\tilde{a}_{x\alpha}})=\sum_{s=m}^{m+n-2}\sum_{t=m}^{s}\overline{d_{t\alpha}}\cdot{}_{s|}q_{x}+\sum_{t=m}^{m+n-1}\overline{d_{t\alpha}}\cdot{}_{m+n-1}p_{x}=\sum_{t=m}^{m+n-1}\overline{d_{t\alpha}}\cdot{}_{t}p_{x} \quad (۱۰)$$

- واریانس و انحراف استاندارد برش‌های آلفای متغیر تصادفی فازی ${}_{m|n}\tilde{a}_{x}$:

$$Var(\underline{{}_{m|n}\tilde{a}_{x\alpha}})=\sum_{s=m}^{m+n-2}[\sum_{t=m}^{s}\underline{d_{t\alpha}}]^{2}\cdot{}_{s|}q_{x}+[\sum_{t=m}^{m+n-1}\underline{d_{t\alpha}}]^{2}\cdot{}_{m+n-1}p_{x}-[\sum_{t=m}^{m+n-1}\underline{d_{t\alpha}}\cdot{}_{t}p_{x}]^{2} \quad (۱۱)$$

$$Var(\overline{{}_{m|n}\tilde{a}_{x\alpha}})=\sum_{s=m}^{m+n-2}[\sum_{t=m}^{s}\overline{d_{t\alpha}}]^{2}\cdot{}_{s|}q_{x}+[\sum_{t=m}^{m+n-1}\overline{d_{t\alpha}}]^{2}\cdot{}_{m+n-1}p_{x}-[\sum_{t=m}^{m+n-1}\overline{d_{t\alpha}}\cdot{}_{t}p_{x}]^{2} \quad (۱۲)$$

بنابراین، می‌توان نوشت:

$$Var({}_{m|n}\tilde{a}_{x\alpha})=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}[\mathrm{Var}(\underline{{}_{m|n}\tilde{a}_{x\alpha}})+\mathrm{Var}(\overline{{}_{m|n}\tilde{a}_{x\alpha}})]\cdot d\alpha$$
$$D({}_{m|n}\tilde{a}_{x\alpha})=\sqrt{\mathrm{Var}({}_{m|n}\tilde{a}_{x\alpha})} \quad (۱۳)$$

- دو تابع توزیع تعریف‌شده برای متغیرهای تصادفی فازی، $\forall\alpha\in[0,1]$، $F_{{}_{m|n}\tilde{a}_{x}}(y)_{\alpha}=[\underline{\mathrm{F}_{{}_{m|n}\tilde{a}_{x}}(y)_{\alpha}},\overline{\mathrm{F}_{{}_{m|n}\tilde{a}_{x}}(y)_{\alpha}}]$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند $(r=1,\dots,n-1)$:

$$\underline{F_{{}_{m|n}a_{x}}(y)_{\alpha}}=\begin{cases}0 & if\ \ y<0\\ mq_{x} & if\ \ 0\leq y<\overline{d}_{m\alpha}\\ mq_{x}+\sum_{s=m}^{m+r-1}{}_{s|}q_{x} & if\ \ \sum_{t=m}^{m+r-1}\overline{d}_{t\alpha}\leq y<\sum_{t=m}^{m+r}\overline{d}_{t\alpha}\\ 1 & if\ \ y\geq\sum_{t=m}^{m+n-1}\overline{d}_{t\alpha}\end{cases} \quad (۱۴)$$

$$\overline{F_{{}_{m|n}\tilde{a}_x}(y)_\alpha} = \begin{cases} 0 & if\ \ y<0 \\ mq_x & if\ \ 0\le y<\underline{d}_{m\alpha} \\ mq_x + \sum_{s=m}^{m+r-1} {}_{s|}q_x & if\ \ \sum_{t=m}^{m+r-1}\underline{d}_{t\alpha} \le y < \sum_{t=m}^{m+r}\underline{d}_{t\alpha} \\ 1 & if\ \ y \ge \sum_{t=m}^{m+n-1}\underline{d}_{t\alpha} \end{cases} \quad (۱۵)$$

- دو جفت کوانتیل εاُم برای متغیرهای تصادفی اینفیمای $\underline{{}_{m|n}\tilde{a}_x}_\alpha$ و سوپرمای $\overline{{}_{m|n}\tilde{a}_x}_\alpha$، $Q_{{}_{m|n}\tilde{a}_x{}^\alpha}^{\varepsilon}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند: $=[\underline{Q_{{}_{m|n}\tilde{a}_x}^{\varepsilon}}_\alpha, \overline{Q_{{}_{m|n}\tilde{a}_x}^{\varepsilon}}_\alpha]$

✓ اگر $0 \prec \varepsilon \le {}_mq_x$، آنگاه $Q_{{}_{m|n}\tilde{a}_x{}^\alpha}^{\varepsilon} = 0$.

✓ اگر ${}_mq_x \prec \varepsilon \le {}_mq_x + {}_{m|}q_x$، آنگاه $Q_{{}_{m|n}\tilde{a}_x{}^\alpha}^{\varepsilon} = \{\underline{d}_{m\alpha}, \overline{d}_{m\alpha}\}$.

✓ اگر ${}_mq_x + \sum_{s=m}^{m+r-1} {}_{s|}q_x \prec \varepsilon \le {}_mq_x + \sum_{s=m}^{m+r} {}_{s|}q_x$، آنگاه $Q_{{}_{m|n}\tilde{a}_x{}^\alpha}^{\varepsilon} = \{\sum_{t=m}^{m+r}\underline{d}_{m\alpha}, \sum_{t=m}^{m+r}\overline{d}_{m\alpha}\}$ و r∊{1,2,...,n-2} و n-2<m و {1,2,...,n-2}=ϴ.

✓ اگر ${}_mq_x + \sum_{s=m}^{m+n-2} {}_{s|}q_x \prec \varepsilon \le 1$، آنگاه $Q_{{}_{m|n}\tilde{a}_x{}^\alpha}^{\varepsilon} = \{\sum_{t=m}^{m+n-1}\underline{d}_{m\alpha}, \sum_{t=m}^{m+n-1}\overline{d}_{m\alpha}\}$.

یافته‌های پژوهش

در آیین‌نامه شماره ۶۸ بیمه مرکزی ج.ا.ا، مصوب تاریخ ۱۳۹۰/۹/۲۲، معیارهای اختصاصی تعیین نرخ در کلیه بیمه‌نامه‌های زندگی و مستمری تعیین شده است (ثبات، ۱۳۹۳):

- جدول مرگ‌ومیر TD88-90 فرانسه: که بیمه مرکزی ج.ا.ا موظف است حداقل هر پنج سال یک‌بار جدول مرگ‌ومیر را به‌روز نماید (این جدول در به پیوست مقاله آمده است)؛

- نرخ سود فنی علی‌الحساب: حداکثر نرخ سود فنی در بیمه‌نامه‌های با مدت حداکثر پنج سال ۱۸٪، در بیمه‌نامه‌های با مدت حداکثر تا ده سال، ۱۸٪ برای پنج سال اول و ۱۵٪ برای مدت مازاد بر پنج سال اول و در بیمه‌نامه‌های با مدت بیش از ده سال، ۱۸٪ برای پنج سال اول و ۱۵٪ برای پنج سال دوم و ۱۰٪ برای مدت مازاد بر ده سال. بیمه مرکزی ج.ا.ا موظف است هر دو سال یکبار نرخ سود فنی را مورد بازنگری قرار دهد؛

- هزینه‌های اداری و بیمه‌گری؛

- هزینه کارمزد.

در این قسمت یک مستمری عمر قابل پرداخت به یک مرد ۶۲ ساله را تحلیل می‌کنیم که به مدت ۳ سال حق‌بیمه پرداخت می‌کند (m=3) و پس از آن به مدت ۱۰ سال مستمری دریافت می‌دارد (n=10). فرض می‌شود مستمری در ابتدای دوره پرداخت می‌گردد. برای قیمت‌گذاری این مستمری از جدول عمر TD88-90 استفاده کرده و احتمالات مربوطه را از این جدول استخراج می‌کنیم. برای فازی‌کردن نرخ بهره فنی، با توجه به مقادیر مرکزی ۱۸، ۱۵ و ۱۰ درصد، بازه ۲± درصد را برای آن منظور می‌کنیم. بدین ترتیب، نرخ بهره فنی فازی را با توجه به آیین‌نامه ۶۸، عدد فازی مثلثی $\tilde{i}_1 = (0.16, 0.18, .20)$ برای ۵ سال اول قرارداد، عدد فازی مثلثی $\tilde{i}_2 = (0.13, 0.15, .17)$ برای ۵ سال دوم قرارداد و عدد فازی مثلثی $\tilde{i}_3 = (0.08, 0.10, .12)$ برای مدت مازاد بر ۱۰ سال درنظرمی‌گیریم که برش آلفای این اعداد فازی مثلثی چنین بیان می‌شود:

$$\forall\alpha \in [0,1], i_{1\alpha} = \left[\underline{i_1}(\alpha), \overline{i_1}(\alpha)\right] = [0.16 + 0.02\alpha, 0.2 - 0.02\alpha]$$

$$\forall\alpha \in [0,1], i_{2\alpha} = \left[\underline{i_2}(\alpha), \overline{i_2}(\alpha)\right] = [0.13 + 0.02\alpha, 0.17 - 0.02\alpha]$$

$$\forall\alpha \in [0,1], i_{3\alpha} = \left[\underline{i_3}(\alpha), \overline{i_3}(\alpha)\right] = [0.08 + 0.02\alpha, 0.12 - 0.02\alpha]$$

بنابراین، برش آلفای تابع تنزیل $\tilde{d}_t = (1+\tilde{i})^{-t}$ به‌صورت زیر تعریف خواهد شد:

$$d_{1t_\alpha} = \left[\underline{d_{1t}}_\alpha, \overline{d_{1t\alpha}}\right] = [(1.2 - 0.02\alpha)^{-t}, (1.16 + 0.02\alpha)^{-t}]$$

$$d_{2t_\alpha} = \left[\underline{d_{2t}}_\alpha, \overline{d_{2t\alpha}}\right] = [(1.17 - 0.02\alpha)^{-t}, (1.13 + 0.02\alpha)^{-t}]$$

$$d_{3t_\alpha} = \left[\underline{d_{3t}}_\alpha, \overline{d_{3t\alpha}}\right] = [(1.12 - 0.02\alpha)^{-t}, (1.08 + 0.02\alpha)^{-t}]$$

متغیر تصادفی فازی ارزش حال مستمری، ${}_{3|10}\tilde{a}_{62}$، اعداد فازیِ درج‌شده در جدول ۱ را با احتمالات مربوطه اتخاذ می‌کند:

جدول ۱: متغیر تصادفی فازی ارزش حال مستمری ${}_{3|10}\tilde{a}_{62}$

احتمال براساس جدول TD88-90	برش آلفای برآمدها	برآمدهای قطعی	برآمدهای فازی
${}_{3}q_{62}$=0.0571	0=[0,0]	0	0
${}_{3\|}q_{62}$=0.0208	$[(1.2 - 0.02\alpha)^{-3}, (1.16 + 0.02\alpha)^{-3}]$	0.6086	$(1 + \tilde{i}_1)^{-3}$
${}_{4\|}q_{62}$=0.0216	$\left[\sum_{t=3}^{4}(1.2 - 0.02\alpha)^{-t}, \sum_{t=3}^{4}(1.16 + 0.02\alpha)^{-t}\right]$	1.1244	$\sum_{t=3}^{4}(1 + \tilde{i}_1)^{-t}$
${}_{5\|}q_{62}$=0.0228	$\left[\sum_{t=3}^{5}(1.2 - 0.02\alpha)^{-t}, \sum_{t=3}^{5}(1.16 + 0.02\alpha)^{-t}\right]$	1.5615	$\sum_{t=3}^{5}(1 + \tilde{i}_1)^{-t}$
${}_{6\|}q_{62}$=0.0240	$\left[\sum_{t=3}^{5}(1.2 - 0.02\alpha)^{-t}, \sum_{t=3}^{5}(1.16 + 0.02\alpha)^{-t}\right] + [(1.17 - 0.02\alpha)^{-6}, (1.13 + 0.02\alpha)^{-6}$	1.9922	$\sum_{t=3}^{5}(1 + \tilde{i}_1)^{-t} + (1 + \tilde{i}_2)^{-6}$
${}_{7\|}q_{62}$=0.0253	$\left[\sum_{t=3}^{5}(1.2 - 0.02\alpha)^{-t}, \sum_{t=3}^{5}(1.16 + 0.02\alpha)^{-t}\right] + \left[\sum_{t=6}^{7}(1.17 - 0.02\alpha)^{-t}, \sum_{t=6}^{7}(1.13 + 0.02\alpha)^{-t}\right]$	2.4165	$\sum_{t=3}^{5}(1 + \tilde{i}_1)^{-t} + \sum_{t=6}^{7}(1 + \tilde{i}_2)^{-t}$
${}_{8\|}q_{62}$=0.0266	$\left[\sum_{t=3}^{5}(1.2 - 0.02\alpha)^{-t}, \sum_{t=3}^{5}(1.16 + 0.02\alpha)^{-t}\right] + \left[\sum_{t=6}^{8}(1.17 - 0.02\alpha)^{-t}, \sum_{t=6}^{8}(1.13 + 0.02\alpha)^{-t}\right]$	2.8345	$\sum_{t=3}^{5}(1 + \tilde{i}_1)^{-t} + \sum_{t=6}^{8}(1 + \tilde{i}_2)^{-t}$
${}_{9\|}q_{62}$=0.0285	$\left[\sum_{t=3}^{5}(1.2 - 0.02\alpha)^{-t}, \sum_{t=3}^{5}(1.16 + 0.02\alpha)^{-t}\right] + [\sum_{t=6}^{9}(1.17 - 0.02\alpha)^{-t}, \sum_{t=6}^{9}(1.13 + 0.02\alpha)^{-t}]$	3.2463	$\sum_{t=3}^{5}(1 + \tilde{i}_1)^{-t}$ $\sum_{t=6}^{9}(1 + \tilde{i}_2)^{-t}$

$\sum_{t=3}^{5}(1+\tilde{i}_1)^{-t}+\sum_{t=6}^{10}(1+\tilde{i}_2)^{-t}$	3.6521	$\left[\sum_{t=3}^{5}(1.2-0.02\alpha)^{-t},\sum_{t=3}^{5}(1.16+0.02\alpha)^{-t}\right]+\left[\sum_{t=6}^{10}(1.17-0.02\alpha)^{-t},\sum_{t=6}^{10}(1.13+0.02\alpha)^{-t}\right]$	${}_{10\mid}q_{62}=0.0300$
$\sum_{t=3}^{5}(1+\tilde{i}_1)^{-t}+\sum_{t=6}^{10}(1+\tilde{i}_2)^{-t}+(1+\tilde{i}_3)^{-11}$	4.0209	$\left[\sum_{t=3}^{5}(1.2-0.02\alpha)^{-t},\sum_{t=3}^{5}(1.16+0.02\alpha)^{-t}\right]+\left[\sum_{t=6}^{10}(1.17-0.02\alpha)^{-t},\sum_{t=6}^{10}(1.13+0.02\alpha)^{-t}\right]+[(1.12-0.02\alpha)^{-11},(1.08+0.02\alpha)^{-11}]$	${}_{11\mid}q_{62}=0.0315$
$\sum_{t=3}^{5}(1+\tilde{i}_1)^{-t}+\sum_{t=6}^{10}(1+\tilde{i}_2)^{-t}+\sum_{t=11}^{12}(1+\tilde{i}_3)^{-t}$	4.3563	$\left[\sum_{t=3}^{5}(1.2-0.02\alpha)^{-t},\sum_{t=3}^{5}(1.16+0.02\alpha)^{-t}\right]+\left[\sum_{t=6}^{10}(1.17-0.02\alpha)^{-t},\sum_{t=6}^{10}(1.13+0.02\alpha)^{-t}\right]+\left[\sum_{t=11}^{12}(1.12-0.02\alpha)^{-t},\sum_{t=11}^{12}(1.08+0.02\alpha)^{-t}\right]$	${}_{11}p_{62}=0.743$

آشکار است که به‌ازای $\alpha=1$ مقدار قطعی برآمدهای این بیمه‌نامه به‌دست‌خواهد آمد.

متغیر تصادفی فازی ارزش حال مستمری، ${}_{3\mid10}\tilde{a}_{62}$، اعداد فازی با احتمالات مربوطه می‌باشد که در جدول ۱ درج شده است. محاسبه حق‌بیمه سالانه[1] این مستمری براساس احتمالات فوت و بقای جدول عمر TD88-90 رقم قطعی ۱/۱۶۱۵ را به‌دست‌می‌دهد. این حق‌بیمه میزان حق‌بیمه پرداختی در ابتدای سه سال اول قرارداد را نشان می‌دهد که برای بازپرداخت منافع ۱ واحدی در ابتدای ۱۰ سال مستمری کفایت می‌کند (به غیر از هزینه‌های اداری و اجرایی بیمه‌گر). به‌عنوان مثال، چنانچه نرخ بهره فنی مورد استفاده در قیمت‌گذاری مستمری مذکور از ۱۸ به ۱۴/۸ یا ۲۰ درصد کاهش یا افزایش پیدا کند و به‌عبارت‌دیگر، نرخ بهره فنی در بازه [۱۴/۸ ۲۰] تغییر کند، حق‌بیمه سالانه در محدوده [۱/۰۲۰۳ ۱/۲۸۱۵] تغییر خواهد کرد.

برش آلفای اعداد فازیِ بیانگر امید ریاضی این متغیرهای تصادفی فازی براساس روابط (۹) و (۱۰) چنین محاسبه می‌گردد:

$$\underline{E({}_{m\mid n}\tilde{a}_x)}_{\alpha}=E(\underline{{}_{m\mid n}\tilde{a}_{x\alpha}})=\sum_{t=3}^{12}\underline{d_{t\alpha}}\cdot{}_tp_x=(1.2-0.02\alpha)^{-3}\times0.943+(1.2-0.02\alpha)^{-4}\times0.922+(1.2-0.02\alpha)^{-5}\times0.901+(1.17-0.02\alpha)^{-6}\times0.878+(1.17-0.02\alpha)^{-7}\times0.854+(1.17-0.02\alpha)^{-8}\times0.828+(1.17-0.02\alpha)^{-9}\times0.802+(1.17-0.02\alpha)^{-10}\times0.773+(1.12-0.02\alpha)^{-11}\times0.743+(1.12-0.02\alpha)^{-12}\times0.712$$

$$\overline{E({}_{m\mid n}\tilde{a}_x)}_{\alpha}=E(\overline{{}_{m\mid n}\tilde{a}_{x\alpha}})=\sum_{t=3}^{12}\overline{d_{t\alpha}}\cdot{}_tp_x=(1.16+0.02\alpha)^{-3}\times0.943+(1.16+0.02\alpha)^{-4}\times0.922+(1.16+0.02\alpha)^{-5}\times0.901+(1.13+0.02\alpha)^{-6}\times0.878+(1.13+0.02\alpha)^{-7}\times0.854+(1.13+0.02\alpha)^{-8}\times0.828+(1.13+0.02\alpha)^{-9}\times0.802+(1.13+0.02\alpha)^{-10}\times0.773+(1.08+0.02\alpha)^{-11}\times0.743+(1.08+0.02\alpha)^{-12}\times0.712$$

واریانس و انحراف استاندارد متغیر تصادفی فازی ${}_{3\mid10}\tilde{a}_{62}$ از روابط (۱۳ و ۱۲، ۱۱) محاسبه می‌گردد:

[1] تک حق‌بیمه خالص (یکجا) کل مبلغی است که اگر در زمان صدور بیمه‌نامه پرداخت شود و توسط نرخ بهره مرکب افزونه گردد، بیمه‌گر قادر به پرداخت منافع در سرسید خواهد بود. اغلب افراد قادر به پرداخت حق‌بیمه یکجا نیستند. برای محاسبه حق‌بیمه خالص سالانه ابتدا حق‌بیمه خالص یکجا را محاسبه و سپس آن را به یک سری از پرداخت‌های سالانه تبدیل می‌کنند.

$$
\begin{aligned}
Var(\underline{{}_{m|n}\tilde{a}_{x\alpha}}) = \{ & (1.2-0.02\alpha)^{-6}\times 0.0208 + [\textstyle\sum_{t=3}^{4}(1.2-0.02\alpha)^{-t}]^2\times 0.0216 + [\textstyle\sum_{t=3}^{5}(1.2-0.02\alpha)^{-t}]^2\times 0.0228 + \\
& \left([\textstyle\sum_{t=3}^{5}(1.2-0.02\alpha)^{-t}]^2 + (1.17-0.02\alpha)^{-12}\right)\times 0.0240 + \\
& \left([\textstyle\sum_{t=3}^{5}(1.2-0.02\alpha)^{-t}]^2 + [\textstyle\sum_{t=6}^{7}(1.17-0.02\alpha)^{-t}]^2\right)\times 0.0253 + \\
& \left([\textstyle\sum_{t=3}^{5}(1.2-0.02\alpha)^{-t}]^2 + [\textstyle\sum_{t=6}^{8}(1.17-0.02\alpha)^{-t}]^2\right)\times 0.0266 + \\
& \left([\textstyle\sum_{t=3}^{5}(1.2-0.02\alpha)^{-t}]^2 + [\textstyle\sum_{t=6}^{9}(1.17-0.02\alpha)^{-t}]^2\right)\times 0.0285 + \\
& \left([\textstyle\sum_{t=3}^{5}(1.2-0.02\alpha)^{-t}]^2 + [\textstyle\sum_{t=6}^{10}(1.17-0.02\alpha)^{-t}]^2\right)\times 0.0300 + \\
& \left([\textstyle\sum_{t=3}^{5}(1.2-0.02\alpha)^{-t}]^2 + [\textstyle\sum_{t=6}^{10}(1.17-0.02\alpha)^{-t}]^2 + (1.12-0.02\alpha)^{-22}\right)\times 0.0315 + \\
& \left([\textstyle\sum_{t=3}^{5}(1.2-0.02\alpha)^{-t}]^2 + [\textstyle\sum_{t=6}^{10}(1.17-0.02\alpha)^{-t}]^2 + [\textstyle\sum_{t=11}^{12}(1.12-0.02\alpha)^{-t}]^2\right)\times 0.743\} - \{(1.2- \\
& 0.02\alpha)^{-3}\times 0.943 + (1.2-0.02\alpha)^{-4}\times 0.922 + (1.2-0.02\alpha)^{-5}\times 0.901 + (1.17-0.02\alpha)^{-6}\times 0.878 + \\
& (1.17-0.02\alpha)^{-7}\times 0.854 + (1.17-0.02\alpha)^{-8}\times 0.828 + (1.17-0.02\alpha)^{-9}\times 0.802 + \\
& (1.17-0.02\alpha)^{-10}\times 0.773 + (1.12-0.02\alpha)^{-11}\times 0.743 + (1.12-0.02\alpha)^{-12}\times 0.712\}^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Var(\overline{{}_{m|n}\tilde{a}_{x\alpha}}) = \{ & (1.16+0.02\alpha)^{-6}\times 0.0208 + [\textstyle\sum_{t=3}^{4}(1.16+0.02\alpha)^{-t}]^2\times 0.0216 + [\textstyle\sum_{t=3}^{5}(1.16+0.02\alpha)^{-t}]^2\times 0.0228 + \\
& \left([\textstyle\sum_{t=3}^{5}(1.16+0.02\alpha)^{-t}]^2 + (1.13+0.02\alpha)^{-12}\right)\times 0.0240 + \\
& \left([\textstyle\sum_{t=3}^{5}(1.16+0.02\alpha)^{-t}]^2 + [\textstyle\sum_{t=6}^{7}(1.13+0.02\alpha)^{-t}]^2\right)\times 0.0253 + \\
& \left([\textstyle\sum_{t=3}^{5}(1.16+0.02\alpha)^{-t}]^2 + [\textstyle\sum_{t=6}^{8}(1.13+0.02\alpha)^{-t}]^2\right)\times 0.0266 + \\
& \left([\textstyle\sum_{t=3}^{5}(1.16+0.02\alpha)^{-t}]^2 + [\textstyle\sum_{t=6}^{9}(1.13+0.02\alpha)^{-t}]^2\right)\times 0.0285 + \\
& \left([\textstyle\sum_{t=3}^{5}(1.16+0.02\alpha)^{-t}]^2 + [\textstyle\sum_{t=6}^{10}(1.13+0.02\alpha)^{-t}]^2\right)\times 0.0300 + \\
& \left([\textstyle\sum_{t=3}^{5}(1.16+0.02\alpha)^{-t}]^2 + [\textstyle\sum_{t=6}^{10}(1.13+0.02\alpha)^{-t}]^2 + (1.08+0.02\alpha)^{-22}\right)\times 0.0315 + \\
& \left([\textstyle\sum_{t=3}^{5}(1.16+0.02\alpha)^{-t}]^2 + [\textstyle\sum_{t=6}^{10}(1.13+0.02\alpha)^{-t}]^2 + [\textstyle\sum_{t=11}^{12}(1.08+0.02\alpha)^{-t}]^2\right)\times 0.743\} - \{(1.16+0.02\alpha)^{-3}\times 0.943 + \\
& (1.16+0.02\alpha)^{-4}\times 0.922 + (1.16+0.02\alpha)^{-5}\times 0.901 + (1.13+0.02\alpha)^{-6}\times 0.878 + (1.13+ \\
& 0.02\alpha)^{-7}\times 0.854 + (1.13+0.02\alpha)^{-8}\times 0.828 + (1.13+0.02\alpha)^{-9}\times 0.802 + (1.13+0.02\alpha)^{-10}\times \\
& 0.773 + (1.08+0.02\alpha)^{-11}\times 0.743 + (1.08+0.02\alpha)^{-12}\times 0.712\}^2
\end{aligned}
$$

جفت توابع توزیع احتمال این متغیر تصادفی فازی چنین تعریف می‌شود (r=1,...,n-1):

$$\underline{F_{{}_{m|n}\tilde{a}_x}(y)_\alpha} = \begin{cases} 0 & if \;\; y < 0 \\ 0.0571 & if \;\; 0 \le y < (1.16+0.02\alpha)^{-3} \\ 0.0779 & if \;\; (1.16+0.02\alpha)^{-3} \le y < \sum_{t=3}^{4}(1.16+0.02\alpha)^{-t} \\ \vdots & \vdots \\ 0.2882 & if \;\; \sum_{t=3}^{5}(1.16+0.02\alpha)^{-t} + \sum_{t=6}^{10}(1.13+0.02\alpha)^{-t} \\ & +(1.08+0.02\alpha)^{-11} \le y < \sum_{t=3}^{5}(1.16+0.02\alpha)^{-t} \\ & +\sum_{t=6}^{10}(1.13+0.02\alpha)^{-t} + \sum_{t=11}^{12}(1.08+0.02\alpha)^{-t} \\ 1 & if \;\; y \ge \sum_{t=3}^{5}(1.16+0.02\alpha)^{-t} + \sum_{t=6}^{10}(1.13+0.02\alpha)^{-t} \\ & +\sum_{t=11}^{12}(1.08+0.02\alpha)^{-t} \end{cases}$$

$$\overline{F_{{}_{m|n}\tilde{a}_x}(y)_\alpha} = \begin{cases} 0 & if \;\; y < 0 \\ 0.0571 & if \;\; 0 \le y < (1.2-0.02\alpha)^{-3} \\ 0.0779 & if \;\; (1.2-0.02\alpha)^{-3} \le y < \sum_{t=3}^{4}(1.2-0.02\alpha)^{-t} \\ \vdots & \vdots \\ 0.2882 & if \;\; \sum_{t=3}^{5}(1.2-0.02\alpha)^{-t} + \sum_{t=6}^{10}(1.17-0.02\alpha)^{-t} \\ & +(1.12-0.02\alpha)^{-11} \le y < \sum_{t=3}^{5}(1.2-0.02\alpha)^{-t} \\ & +\sum_{t=6}^{10}(1.17-0.02\alpha)^{-t} + \sum_{t=11}^{12}(1.12-0.02\alpha)^{-t} \\ 1 & if \;\; y \ge \sum_{t=3}^{5}(1.2-0.02\alpha)^{-t} + \sum_{t=6}^{10}(1.17-0.02\alpha)^{-t} \\ & \sum_{t=11}^{12}(1.12-0.02\alpha)^{-t} \end{cases}$$

براساس توابع توزیع نوشته شده در بالا، جفت چندک (کوانتیل) εاُم برای متغیرهای تصادفی فازی اینفیمای $\underline{{}_{m|n}\tilde{a}_x}_\alpha$ و سوپرمای $\overline{{}_{m|n}\tilde{a}_x}_\alpha$ چنین تعریف می‌شود:

- اگر $0 < \varepsilon < 0.0571$، آنگاه $Q_{{}_{m|n}\tilde{a}_x{}^\alpha}^{\varepsilon} = 0$.
- اگر $0.0571 < \varepsilon \le 0.0779$، آنگاه:

$$Q_{{}_{m|n}\tilde{a}_x{}^\alpha}^{\varepsilon} =\{(1.2-0.02\alpha)^{-3}, (1.16+0.02\alpha)^{-3}\}.$$

- اگر $0.2567 < \varepsilon < 0.2882$، آنگاه:

$$Q_{{}_{m|n}\tilde{a}_x{}^\alpha}^{\varepsilon} =\{[\sum_{t=3}^{5}(1.2-0.02\alpha)^{-t} + \sum_{t=6}^{10}(1.17-0.02\alpha)^{-t} + (1.12-0.02\alpha)^{-11}], [\sum_{t=3}^{5}(1.16+0.02\alpha)^{-t}+\sum_{t=6}^{10}(1.13+0.02\alpha)^{-t}+(1.08+0.02\alpha)^{-11}]\}$$

و $r\epsilon\{1,2,\ldots,n-2\}$ و $n-2<m$ و $\Theta=\{1,2,\ldots,n-2\}$.

- اگر $0.2882 < \varepsilon \le 1$، آنگاه

$$Q_{{}_{m|n}\tilde{a}_x{}^\alpha}^{\varepsilon} =\{[\sum_{t=3}^{5}(1.2-0.02\alpha)^{-t} + \sum_{t=6}^{10}(1.17-0.02\alpha)^{-t} \sum_{t=11}^{12} +(1.12-0.02\alpha)^{-t}], [\sum_{t=3}^{5}(1.16+0.02\alpha)^{-t}+\sum_{t=6}^{10}(1.13+0.02\alpha)^{-t}+\sum_{t=11}^{12}(1.08+0.02\alpha)^{-t}]\}$$

باید توجه داشت که امید ریاضی، توزیع احتمال و چندک‌های یک عدد تصادفی فازی، خود یک عدد فازی است، درحالی‌که برای بیان حق‌بیمه‌ها یا حساب ذخایر به یک کمیت قطعی نیاز است. بنابراین، اعداد فازی باید به اعداد قطعی تبدیل شوند. با این حال می‌توان اعداد فازی را به‌عنوان یک تقریب درنظرگرفت که یک حد بالا و پایین برای قضاوت بیمه‌سنجی از قیمت قابل قبول بازاری تعیین می‌کند.

نتایج و بحث

در حوزه دانش بیمه‌سنجی، تئوری مجموعه‌های فازی برای مدل‌سازی مسائلی به‌کارمی‌رود که نیازمند قضاوت ذهنی بیمه‌سنج بوده یا اطلاعات در دسترس مبهم یا اندک است. یکی از کاربردهای تئوری مجموعه فازی در بیمه‌سنجی، قیمت‌گذاری قراردادهای بیمه عمر با نرخ بهره فازی است. در این مقاله از اعداد فازی برای کمّی‌کردن نرخ تنزیل بیمه‌ای استفاده کرده و فرض می‌کنیم رفتار مرگ‌ومیر تصادفی است. استفاده از متغیرهای تصادفی فازی نه تنها کمّی‌کردن قیمت انتظاری بیمه‌نامه را امکان‌پذیر می‌کند، بلکه ریسک مرگ‌ومیر را نیز در محاسبات لحاظ می‌نماید که این مطلب برای تطابق ذخایر با تعهدات پیش‌بینی‌نشده شرکت بیمه عمر ضروری است.

توجه به این نکته ضروری است که امید ریاضی یک متغیر تصادفی فازی، خود یک عدد فازی است، اگرچه، بیان حق‌بیمه یا ذخایر در صورت‌های مالی باید به‌صورت اعداد قطعی باشد. محاسبه برش آلفای برآمدهای فازی در بیمه‌نامه مستمری عمر به معنای آن است که به‌جای یک برآمد قطعی، یک حد بالا و پایینی برای این برآمد درنظرگرفته‌می‌شود که برآمد قطعی در بین آن نوسان می‌کند. بدین ترتیب می‌توان حاشیه‌ای برای "قضاوت ذهنی بیمه‌سنجی" یا بازه‌ای برای "قیمت‌های بازاری قابل قبول" تعریف کرد.

همانگونه که در مقدمه مقاله ذکر شد، نوسانات نرخ بهره فنی در نتیجه تغییر در سیاست‌های پولی، مالی و ارزی دولت می‌تواند ذخایر و تعهدات یک شرکت بیمه عمر را تحت تأثیر قرار دهد. با استفاده از رویکرد فازی به نرخ بهره فنی، محدوده‌ای برای شرکت بیمه قابل ترسیم خواهد بود که نوسان ذخایر و تعهدات در این بازه می‌تواند اطمینان از توانگری را به‌دنبال داشته باشد. بدین ترتیب، امکان پیش‌نگری و برنامه‌ریزی بهینه برای بیمه‌گران فراهم خواهد شد.

اگرچه در این مقاله صرفاً به قیمت‌گذاری بیمه‌نامه مستمری عمر پرداخته شد، این امکان وجود دارد که محاسبات را برای سایر انواع محصولات بیمه عمر نظیر بیمه تمام عمر، بیمه عمر و پس‌انداز، بیمه عمر جامع و... و همچنین برای حق بیمه‌های دوره‌ای توسعه داد. لازم به ذکر است با توجه به پیچیدگی محاسبات فازی، نویسندگان، ارائه مقاله حاضر را مقدمه‌ای برای معرفی این تکنیک در حوزه بیمه و به‌ویژه بیمه عمر دانسته و امتداد تحقیقات نظری و عملی آن را به سایر محققان علاقه‌مند پیشنهاد می‌نمایند.

منابع و ماخذ

اتکینسن، م. دیکسن. د.، (۱۳۹۱). مبانی مطالعات اکچوئرال، ترجمه غدیر مهدوی و کیوان اسمعیلی، تهران: پژوهشکده بیمه.

ثبات، غ.م.، (۱۳۹۳). مجموعه کامل قوانین و مقررات صنعت بیمه، تهران: انتشارات پژوهشکده بیمه، چ۲.

گربر، ه.ی.، (۱۳۹۰). ریاضیات بیمه عمر، ترجمه غدیر مهدوی، حمید حاتمی و محمد عباسی، تهران: پژوهشکده بیمه.

Beekman, J.A.; Fuelling, C.P., (1992), Extra-randomness in certain annuity models. Insurance: Mathematics and Economics, 10, pp.275–287.

Betzuen, A.; Jiménez, M.; Rivas, J.A., (1997). Actuarial mathematics with fuzzy parameters, an application to collective pension plans. Fuzzy Economic Review, 2, pp.47–66.

Boyle, P.P., (1976). Rates of return as random variables. Journal of Risk and Insurance, 43, pp.693–713.

Chang, Y.H.O.; Ayyub, B.M., (2001). Fuzzy regression methods: A comparative assessment. Fuzzy Sets and Systems, 119, pp.187–203.

Cummins, J.D.; Derrig, R.A., (1997). Fuzzy financial pricing of property-liability insurance, North American Actuarial Journal, 1, pp.21–44.

Di Paolo, F., (1969). An application of simulated stock market trends to investigate a Ruin Problem. Transactions of the Society of Actuaries, XXI, pp.549-562.

Gerber, H.U., (1995). Life insurance mathematics. Berlin: Springer-Verlag.

Kahn, P.M., (1971). Projections of variable life insurance operation. Transactions of the Society of Actuaries. XXIII, pp.335-366.

Lintner, J., (1972). Equilibrium in a random walk and lognormal securities market. Discussion Paper No.235, Harvard Institute of Economic Research, Harvard University, Cambridge, Massachusetts.

Markowitz, H.M., (1952). Portfolio selection. Journal of Finance, VII(1), pp.77-91.

Panjer, H.H.; Bellhouse, D.R., (1981). Stochastic modeling of interest rates with applications to life contingencies—part II. Journal of Risk and Insurance, 48, pp.628–637.

Sanches, J.A.; Puchades, L.G., (2012). Using fuzzy random variables in life annuities pricing. Fuzzy Sets and Systems, 188, pp.27–44.

Ziock, R.W., (1973). A realistic profit model for individual non-participating life insurance. Journal of Risk and Insurance, XL(3), p.357.