



ORIGINAL RESEARCH PAPER

Application of phase-type models in mortality modeling

Z. Shojaee Azar¹, A. Hassan Zadeh^{2,*}

¹ Department of Actuarial Sciences, Allameh Tabatabai University, Tehran, Iran

² Department of Actuarial Sciences, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran

ARTICLE INFO

Article History

Received: 31 October 2012

Revised: 15 December 2012

Accepted: 27 January 2014

Keywords

Phase-type Distribution;
Mortality Modeling; Annuity
Pricing; Aging Process;
Physiological Age.

ABSTRACT

In this article, the application of phase-type distributions in the modeling of mortality rates has been investigated. Phase-type random variable is defined as the time to absorption moment (end point) in continuous Markov chains. In this article, instead of real age, we have used physiological age, which is defined as a health index. This age is determined according to the tissues and organs of the person's body. Each position of the Markov chain is considered a physiological age, and the end point of this chain determines the death of a person, then using the analytical method in the phase-type concept, we calculate all the probabilities related to death at the actual age. After modeling, we estimate the parameters of phase-type distribution by the least squared error method and then we fit the model to Iran's life table. Finally, by using these parameters and making sure that the model fits well to Iran's mortality table, we calculate finite closed expressions for the current value of whole life insurance and life annuity.

*Corresponding Author:

Email: am_hassanzadeh@sbu.ac.ir

DOI: 10.22056/ijir.2014.01.05



کاربرد مدل های فاز - نوع در مدل بندی مرگومیر

زهرا شجاعی آذر^۱، امین حسن زاده^{۲*}

^۱ گروه علوم اکچوئرال، دانشگاه علامه طباطبائی، تهران، ایران

^۲ گروه علوم اکچوئرال، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران

چکیده:

در این مقاله کاربرد توزیع های فاز - نوع در مدل بندی نرخ های مرگومیر بررسی شده است. متغیر تصادفی فاز - نوع همانند زمان تا لحظه جذب (نقطه پایانی) در زنجیرهای مارکوف پیوسته تعریف شده است. در این مقاله، به جای سن واقعی از سن فیزیولوژیکی استفاده کرده ایم که به عنوان شاخص سلامتی تعریف شده است. این سن با توجه به بافت ها و ارگان های بدن فرد تعیین می شود. هر موقعیت زنجیر مارکوف یک سن فیزیولوژیکی در نظر گرفته می شود و نقطه پایانی این زنجیر، مرگ یک شخص را مشخص می کند، سپس با استفاده از روش تحلیلی در مفهوم فاز - نوع، همه احتمالات مربوط به مرگومیر در سن واقعی را محاسبه می کنیم. بعد از مدل بندی، پارامترهای توزیع فاز - نوع را به روش کمترین توان دوم خطا برآورد کرده و در ادامه مدل را به جدول عمر ایران برازش می دهیم. نهایتاً، با استفاده از این پارامترها و اطمینان از خوب برازش شدن مدل به جدول مرگومیر ایران، عبارات بسته متناهی را برای ارزش فعلی بیمه تمام زندگی و مستمری عمر محاسبه می کنیم.

اطلاعات مقاله

تاریخ دریافت: ۱۰ آبان ۱۳۹۱

تاریخ داوری: ۲۵ آذر ۱۳۹۱

تاریخ پذیرش: ۰۷ بهمن ۱۳۹۲

کلمات کلیدی

توزیع فاز - نوع

مدل بندی مرگومیر

قیمت گذاری مستمری ها

فرایند پیری

سن فیزیولوژیکی

*نویسنده مسئول:

ایمیل: am_hassanzadeh@sbu.ac.ir

DOI: 10.22056/ijir.2014.01.05

اکچوئری‌ها برای محاسبات بیمه و بررسی تعهدات بلندمدت سازمان تأمین اجتماعی (مستمری‌ها) و دیگر صندوق‌های بازنشستگی یا پیش‌بینی‌های جمعیتی، مستلزم استفاده از آمار و اطلاعات قابل اعتمادند. یکی از اطلاعات بسیار مهم و مؤثر در این زمینه جدول‌های مرگ‌ومیر هستند. استفاده از جدول‌های مرگ‌ومیر از متداول‌ترین و کهن‌ترین روش‌های بررسی و اندازه‌گیری میزان مرگ‌ومیر در یک جمعیت است؛ در حقیقت جداول مرگ‌ومیر برای اکچوئری‌ها، ابزار اصلی توصیف الگوی مرگ‌ومیر تلقی می‌شوند. به خصوص در بیمه‌های زندگی، اکچوئری‌ها با استفاده از جداول عمر، در جهت شناخت الگوی احتمالی پرداخت‌ها تلاش می‌نمایند و زمانی که هیچ مدل ریاضی برای مرگ‌ومیر به دست نیاید یک جدول مرگ‌ومیر، تنها گزارشی از آزمایش (روی جمعیت) گذشته است و به تبع به کارگیری آن در حوادث آینده متضمن این امیدواری است که آزمایش گذشته بدون هیچ دگرگونی در آینده تکرار شود. از این رو تلاش‌های بسیاری برای دستیابی به مدلی که بتواند این جداول را تبیین کند، صورت گرفته است. بدون شک، یافتن مدل ریاضی برای احتمال مرگ‌ومیر از نظر کاربردی بسیار مفید است. زیرا روشن است که کارکردن با تابعی که تعداد کمی پارامتر دارد و از نظر هندسی نیز دارای منحنی همواری است به مراتب آسان‌تر از کارکردن با جدول عمری است که پارامترهای فراوانی داشته و در موارد بسیاری نیز احتیاج به درون‌یابی، برون‌یابی، هموارسازی و تعدیل‌های متعدد آماری دیگر جهت یافتن احتمال‌های فوت دارد که در محاسبه حق بیمه فنی به کار می‌روند. هیچ یک از مدل‌های استفاده شده تاکنون نمی‌توانند توزیع زمان مرگ را به روشنی مشخص کنند یعنی هیچ روش تحلیلی برای زمان مرگ در این مدل‌ها وجود ندارد، لذا ایجاد یک مدل که بتواند علاوه بر برازش به داده‌ها توزیع زمان مرگ را نیز تعیین کند مفید به نظر می‌رسد. هدف این مقاله معرفی چنین مدلی است.

مروری بر پیشینه پژوهش

اگر بخواهیم پیشینه مدل‌های مرگ‌ومیر را بیان کنیم می‌توان گفت آغاز تدوین مدل‌های مرگ‌ومیر از ساختن جداول مرگ‌ومیر شروع شد که اولین دستاورد در این زمینه در ابتدای سال ۱۶۹۳ به وسیله ستاره‌شناس مشهور، ادmond هالی^۱، انجام گرفته است که وی جدول عمری از تعداد فوت‌های مشاهده شده به دست آورد. در سال ۱۷۴۰، اولین جدول عمر به تفکیک مردان و زنان را نیکولاس استرویک^۲ منتشر کرد. اما اولین مدل تحلیلی مرگ‌ومیر به وسیله مدل آبراهام دمورآور^۳ معرفی شد که احتمال بقاء را به صورت تابع افزایشی از سن کنونی فرد در نظر گرفته است. بعدها گومپرتز^۴ در سال ۱۸۲۵ مدل کامل‌تری از مدل آبراهام را معرفی نمود که این مدل عمدتاً رابطه مرگ را با سن نشان می‌دهد. از آنجا که فرض گومپرتز، در این مدل آن بود که قوای جسمانی انسان با بالا رفتن سن در مقابله با مرگ کاهش می‌یابد، این مدل یک تابع نمایی است. نتیجه کار او، بهترین مدل مرگ‌ومیر پارامتری بیان شده تا سال ۱۸۶۰ بود. در سال ۱۸۶۰ مکهم^۵ مدل کامل‌تری از مدل گومپرتز را ارائه نمود و مدل گومپرتز را که برای سنین بالاتر مناسب نبود، اصلاح کرد و بعد از او پرکس^۶ مدل ریاضی ارائه شده توسط گومپرتز و مکهم را کامل نمود. مدل‌های گومپرتز و مکهم از جمله مدل‌های رایج مرگ‌ومیر باقی ماندند. تا اینکه در اوایل قرن بیستم، اقتصاددان و جامعه‌شناس ایتالیایی پارتو^۷ نظریات خود را که بر مبنای مطالعه مشکلات جامعه بود در مدل‌بندی مرگ‌ومیر دخیل کرد. پس از آن، در اواخر قرن بیستم، مدل‌های مرگ‌ومیر پیچیده‌ای مورد مطالعه قرار گرفتند که اکثر آنها تعدیل شده یا تعمیم یافته مدل‌های مرگ‌ومیر گومپرتز و مکهم بودند. از آن جمله می‌توان به مدل لی-کارت^۸ اشاره کرد که مدل مرگ‌ومیر را به صورت فرایند تصادفی در نظر می‌گرفت.

جدیدترین دیدگاه در مطالعه بقای بشر ایده مرگ‌ومیر تصادفی است که مرگ‌ومیر همانند یک فرایند تصادفی در نظر گرفته می‌شود (Yashin, 2001). اما به کاربردن زنجیر مارکوف در مدل‌بندی مرگ‌ومیر به طوری که توزیع زمان مرگ مشخص باشد و دارای توزیع فاز-نوع باشد تنها به وسیله لین و لیو^۹ انجام گرفته است. درباره فاز-نوع می‌توان گفت که از زمان معرفی توزیع فاز-نوع به وسیله نیوتس^۱ در سال

1. Edmund Halley
2. Nicholas Struyck
3. Abraham De Moivre
4. Gompertz
5. Makeham
6. Perkes
7. Pareto
8. Lee and Carter, 1992
9. Lin and Liu, 2007

۱۹۷۵، توزیع‌های فاز- نوع در طیف وسیعی در کاربردهای مدل‌سازی تصادفی در حوزه‌های گوناگونی مانند ارتباط از راه دور، مالی، مدل‌سازی تله ترافیک، آمار زیستی، نظریه صف‌بندی و... استفاده شده‌اند. البته اثر توزیع فاز- نوع را در کارهای پیشگامانی چون ارلانگ^۲ و جنسن^۳ می‌توان دید. ارلانگ در سال ۱۹۱۷، اولین شخصی بود که توزیع نمایی را با «روش مرحله‌ای» بسط داد. او یک متغیر تصادفی غیرمنفی را تعریف کرد به طوری که فاصله زمانی بین مرحله‌ها (موقعیت‌ها) یک مقدار نمایی با نرخ ثابت است که امروزه، ما توزیعی با این رفتار را توزیع ارلانگ می‌نامیم. نیوتس در سال ۱۹۸۱، تعمیمی از روش مرحله‌ای ارلانگ را این‌گونه تعریف کرد که متغیر تصادفی فاز- نوع، زمان سپری شده تا لحظه مرگ در یک زنجیر مارکوف پیوسته متناهی است که تنها یک نقطه جذب دارد. بعدها افراد دیگری توزیع فاز- نوع را در زمینه‌های دیگری استفاده کردند مثلاً در کیک و همکارانش^۴ توزیع کسری سرمایه در نتیجه ورشکستگی مدل خطر اندرسون با توزیع خسارت فازگونه را مطالعه کردند و نشان دادند که اگر مقدار مطالبه‌های اشخاص توزیع فاز- نوع داشته باشد، توزیع کسری سرمایه دارای توزیع فاز- نوع ساده خواهد بود. حسن‌زاده و همکارانش^۵ مدل‌های فاز- نوع را در محاسبات اکچوئری برای بیمه از کارافتادگی به‌کاربردند، آنها نشان دادند که تغییرات در وضعیت بیمه‌شده می‌تواند به‌طور مناسب به‌وسیله مدل فاز- نوع مدل شود و خاطر نشان کردند که استفاده از چنین مدلی، عبارات محاسباتی ساده و روشنی برای احتمالات مربوطه و ارزش فعلی آنها به‌دست می‌دهد.

مدل

در سراسر قرون گذشته الگوهای مرگ‌ومیر به دلیل تغییر دلیل اصلی مرگ از بیماری‌های واگیردار به بیماری‌های مزمن دگرگون شده است و در پایان قرن بیستم نرخ مرگ‌ومیر در نتیجه بیماری‌های مزمن کاهش یافته است. لذا در تصحیح روند پیش‌بینی، توجه به نظرات کارشناسان که رفتار، بهداشت و آسیب‌های اجتماعی را روی پیش‌بینی‌های مرگ‌ومیر مهم می‌دانند ضروری است؛ به دلیل فقدان ارتباط مستقیم بین پارامترهای موجود در مدل مرگ‌ومیر و مکانسیم پیری، دخیل کردن نظرات کارشناسان در پیش‌بینی‌های مرگ‌ومیر اغلب امری نشدنی است. اگر بتوانیم مدل مرگ‌ومیری داشته باشیم که:

- به داده‌های واقعی مرگ‌ومیر برازش داده شود؛
- بتواند ارتباطی بین پارامترهای مدل با مکانسیم فیزیولوژیکی پیری با یک اندازه واقعی به‌وجود آورد به طوری که بتوان نظر کارشناسان را در آن وارد کرد؛
- امکان تحلیل کمی مرگ‌ومیر را فراهم کند.

در این صورت می‌توان گفت به مدل مطلوبی دست پیدا کرده‌ایم. ایده ایجاد مدل مرگ‌ومیری با این ویژگی‌های مطلوب به‌وسیله اکچوئری‌های قبلی مطرح شده است، اما تاکنون مدل مناسبی از این نوع هنوز ایجاد نشده است.

در این مقاله، مدلی را فرض می‌کنیم که براساس فرایند مارکوف متناهی بنیان شده و دارای یک نقطه پایانی (جذب) است، این مدل فرایند فیزیولوژیکی پیری بدن انسان را توصیف می‌کند. دلیل استفاده ما از زنجیر مارکوف در این مدل برای اطمینان از این امر است که توزیع زمان مرگ مشخص است و دارای توزیع فاز- نوع است. در نتیجه این اطمینان بسیاری از روش‌های تحلیلی که برای توزیع فاز- نوع به‌کاربرده می‌شود می‌تواند برای مدل مرگ‌ومیر انسان نیز به‌کار رود. لذا در این بخش ابتدا به تعریفی از سن فیزیولوژیکی و فرایند پیری پرداخته و سپس مدل را معرفی می‌کنیم.

فرایند پیری و سن فیزیولوژیکی

به نقل از جونس^۶، اصطلاح فرایند پیری که در مورد ارگان‌های زنده بدن به‌کار می‌رود، همان ژن‌های معین شده، رشد و تقلیل یافته‌ای هستند که ضرورتاً با گذشت زمان غیرقابل بازگشت می‌باشند و با از کارافتادگی یک ارگانسیم یا قسمتی از آن به انطباق با محیط پیرامون خود

1. Neuts

2. Erlang, 1909

3. Jensen, 1953

4. Drekić et al., 2004

5. Hassan Zadeh et al., 2013

6. Jones, 1956

می‌پردازند. تجلی این پدیده کاهش در ظرفیت ارگان در برابر تنش‌های مربوط به آن است، یعنی افزایش استعداد ابتلا به بیماری‌های خاص به موازات پیرشدن و وقتی ارگان به اوج کاهش ظرفیت خود می‌رسد مرگ آن فرا می‌رسد.

واضح است که پیری انسان با طیف گسترده‌ای از تغییرات فیزیولوژیکی مرتبط است مانند: کاهش شدت فشار خون در میان بافت‌های مختلف، اختلالات متابولیسم چربی، کم شدن تراکم استخوان و ... چنین تغییراتی نه تنها انسان را در معرض بیماری‌های بسیاری قرار می‌دهد بلکه باعث افزایش قابلیت مردن در فرد می‌شود.

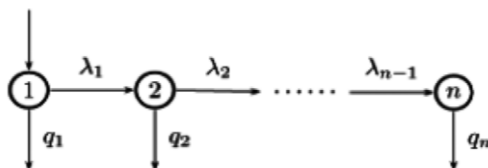
برخی از مطالعه‌های تجربی، جستجو برای درک تغییرات توابع فیزیولوژیکی مختلف را نشان می‌دهند. به‌عنوان مثال: شوک^۱، بافیتس و سارجنت^۲ و استرهلر^۳. یافته‌های اصلی در این مطالعات روی تغییرات تابع‌های فیزیولوژیکی بشر می‌تواند به این صورت خلاصه شود:

- بیشتر متغیرهای اصلی به حداکثر ظرفیت عملکردی خود تقریباً بین سنین ۳ تا ۲۰ سال می‌رسند.
 - بعد از ۳۰ سالگی، بیشتر متغیرهای اصلی به طور خطی کاهش می‌یابند، در مقابل نرخ‌های مرگ‌ومیر به طور نمایی افزایش می‌یابند.
 - کاهش تغییرات توابع فیزیولوژیکی در میان اعضای یک نسل است و این تغییرات اندکی با بالا رفتن سن افزایش می‌یابند.
- این یافته‌ها بیان می‌کنند که فرایندهای پیری می‌توانند در دوره‌های مدل‌بندی شوند که تغییرات در تابع‌های فیزیولوژیکی، کیفی و کمی است.

در این مقاله یک سن فیزیولوژیکی فرضی را معرفی می‌کنیم که یک تغییر فیزیولوژیکی قابل کشف را در نتیجه یک یا چند تابع فیزیولوژیکی مزبور نشان می‌دهد. این سن فیزیولوژیکی می‌تواند همانند یک شاخص سلامتی تعبیر شود که درجه پیری در بدن انسان را نشان می‌دهد. بر خلاف بعضی از مدل‌های مرگ‌ومیر که روی فاکتورهای سلامتی خاص و ارتباط‌های آنها با مرگ‌ومیر تمرکز می‌کنند، سن فیزیولوژیکی را در یک سطح بنیادی تعریف می‌کنیم و فرض می‌کنیم که آن فقط در یک جهت توسعه داده شده است. از آنجایی که ویژگی خطی به‌وسیله تابع‌های فیزیولوژیکی مختلف حفظ می‌شوند، لذا فرض می‌کنیم که خطی بودن نیز در طول زمان با سن‌های فیزیولوژیکی حفظ شود. به‌علاوه، تغییر موقعیت‌های سلامتی یا انتقال از یک سن فیزیولوژیکی به سن بعدی تصادفی است که اساساً متفاوت از سن تقویمی است. در پایان می‌توان گفت که مرگ‌ومیر دیده‌شده هم انعکاس طبیعی از فرایند پیری و هم پاسخی به فاکتورهای محیطی است. اثر متقابل بین فرایند پیری درونی و فاکتورهای بیرونی مرگ، همان قابلیت (استعداد) توصیف‌شده در تعریف پیری است. با افزایش سن فیزیولوژیکی، ظرفیت فیزیولوژیکی کاهش می‌یابد که این امر حاکی از افزایش استعداد ابتلا به بیماری‌های مهلک و کشنده است.

مدل مرگ‌ومیر پیشنهادی

حال، یک فرایند مارکوف زمان پیوسته، موقعیت متناهی را برای مدل فرایند پیری فرضی ارائه می‌کنیم (شکل ۱). هر موقعیت ارائه‌شده یک سن فیزیولوژیکی است و پیری به عنوان یک فرایند انتقال متوالی از یک سن فیزیولوژیکی به سن فیزیولوژیکی بعدی توضیح داده شده است. یک نقطه جذب وجود دارد و انتقال از هر موقعیت دیگر به موقعیت جذب به عنوان فرایند سالخوردگی پایان یافته به دلیل مرگ ناگهانی از یک دلیل تصادفی یا از یک بیماری کشنده تعبیر می‌شود. همان‌طور که در شکل ۱ می‌بینید، برای هر سن فیزیولوژیکی i دو پارامتر استفاده شده است: یکی پیشرفت فرایند پیری را توصیف می‌کند و دیگری قابلیت مرگ در هر موقعیت فیزیولوژیکی را انعکاس می‌دهد. به‌خصوص، پارامتر λ_i که نرخ انتقال از سن فیزیولوژیکی i به سن فیزیولوژیکی $i+1$ را ارائه می‌کند و می‌تواند به‌عنوان یک نرخ پیری تعبیر شود که سرعت پیشروی یک فرد از سن i به سن $i+1$ را اندازه‌گیری می‌کند و λ_i یک اندازه جامع از شدت کاهش سالخوردگی برای یک جامعه است، نه برای یک شخص خاص. به زبان احتمالی، ماندن در موقعیت i قبل از حرکت به وضعیت $i+1$ از یک توزیع نمایی با میانگین $\frac{1}{\lambda_i}$ پیروی می‌کند. بنابراین، هرچه λ_i بزرگ‌تر باشد، پیشرفت سالخوردگی در جامعه سریع‌تر است.



1. Shock, 1974

2. Bafitis and Sargent, 1977

3. Strehler, 1999

شکل ۱: فرایند پیری فیزیولوژیکی ارائه شده

پارامتر q_i ، پارامتر جامع دیگری است که قابلیت یا استعداد، یعنی شانس مردن در هر سن فیزیولوژیکی i را توصیف می‌کند. دو نوع متفاوت از تهدیدات خطرناک در هر سن وجود دارد. یکی مرگی که مستقل از سالخورده‌گی است همچون جراحت و آسیب که نرخ مرگ به این دلیل به وسیله $h_1(i)$ تعیین می‌شود. دیگری افزایش قابلیت مرگ به دلیل زوال در توابع فیزیولوژیکی مانند مرگ به دلیل پیری است. نرخ مرگ به این دلیل به وسیله $h_2(i)$ مشخص می‌شود که یک تابع افزایشی از i است. در اینجا فرض می‌کنیم که این دو نوع نرخ جمع پذیرند، یعنی:

$$q_i = h_1(i) + h_2(i)$$

از این رو، مرگ در نتیجه دو عامل رقابتی: زوال برگشت‌ناپذیر توابع داخلی فیزیولوژیکی و خطر تصادفی مرگ آنی در هر سن فیزیولوژیکی (مرگ ناگهانی) است.

از آنجایی که فرایند مارکوف تنها یک نقطه جذب دارد، زمان مرگ (زمان جذب) از یک توزیع فاز- نوع پیروی می‌کند، ماتریس نرخ انتقال فرایند مارکوف به صورت زیر داده می‌شود:

$$(1) \quad \Lambda = \begin{pmatrix} -(\lambda_1 + q_1) & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -(\lambda_2 + q_2) & \lambda_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & -q_n \end{pmatrix}$$

با توزیع ابتدایی $\alpha = (1, 0, \dots, 0)$

در اینجا به بیان اجمالی از ویژگی‌های توزیع فاز- نوع می‌پردازیم:

اگر فرض کنیم T دارای توزیع فاز- نوع با نمایش (α, Λ) باشد پس عبارات بسته برای تابع توزیع بقاء، تابع چگالی احتمال، تبدیل لاپلاس و گشتاورهای آن وجود دارد و به صورت زیر است:

- تابع بقاء

$$(2) \quad S(t) = \alpha \exp(\Lambda t) e^T, \quad t > 0$$

که در اینجا e^T برداری از یک تعریف می‌شود.

- تابع چگالی احتمال

$$(3) \quad f(t) = \dot{F}(t) = \alpha \exp(\Lambda t) b^T, \quad t > 0$$

که در آن $b^T = -\Lambda e^T$

- تبدیل لاپلاس

$$(4) \quad \mathcal{L}(s) = \alpha (sI - \Lambda)^{-1} b^T$$

- گشتاورها

$$(5) \quad m_k = (-1)^k k! \alpha \Lambda^{-k} e^T, \quad k=1,2,\dots$$

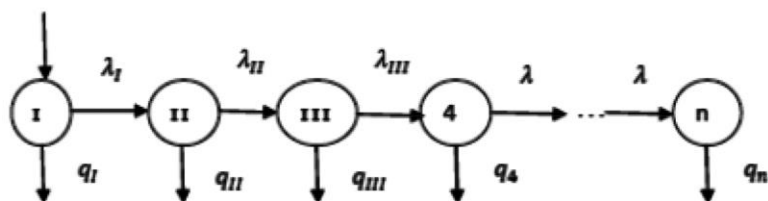
حال، ساختارهای خاص تعریف شده برای $\lambda_i, h_2(i), h_1(i)$ را ارائه می‌کنیم، که نه تنها برآورد مدل را ممکن می‌سازند بلکه تضمین می‌کنند که مدل و پارامترهای داده شده آن دارای مفهوم فیزیولوژیکی منطقی برای پویایی پیری است. علاوه بر این یک مدل سازمان یافته از مسئله عدم یکتایی در برآورد توزیع فاز- نوع اجتناب می‌کند.

یافته‌های تجربی نشان می‌دهند که توابع فیزیولوژیکی متفاوت در سن‌های بالاتر یک شیب خطی آهسته به سمت میانگین را ارائه می‌کنند. بنابراین منطقی است که یک نرخ انتقال ثابت بین موقعیت‌ها را فرض کنیم، یعنی:

$$\lambda_i = \lambda \quad \text{for } i=k+1, \dots, n$$

برای سنین بالاتر از k ، پارامتر λ برای همه موقعیت‌ها یکسان فرض شده است که k تعریف ما از یک دوره رشد است که در آن نوزادان با محیط زیست وفق پیدا می‌کنند و برای رسیدن به حداکثر عملکرد فیزیولوژیکی خود رشد می‌یابند. این دوره‌ای است که از زمان تولد با یک

میزان مرگومیر نسبتاً بالا شروع شده و سپس با کاهش مرگومیر و رسیدن به نقطه مینیمال تمام می‌شود. k موقعیت عنوان شده، به قبل از فرایند پیری اضافه می‌شود. فرایند مارکوفی که دارای دوره رشد به طول ۳ است در شکل ۲ مشخص شده است.



شکل ۲: فرایند پیری فیزیولوژیکی مدل مارکوف تکمیل شده

اعداد یونانی دوره رشد را ارائه می‌کنند. فرایند مارکوف تکمیل شده ساختار یکسانی همانند بخش قبلی دارد. در عمل، یک مقدار کوچک k (۲ تا ۴) برای دوره رشد مناسب است. برای جامعه ایران، با تکرار و آزمایش، k را برابر ۴ به دست آورده‌ایم. برای نرخ خطر مستقل از پیری، پیشنهاد می‌شود که:

$$(۶) \quad h_1(i) = \begin{cases} a + b & i_1 < i \leq i_2 \\ b & \text{درغیراین صورت} \end{cases}$$

که در آن ثابت b همانند یک نرخ پس‌زمینه و ثابت a به‌عنوان یک نرخ تصادف مرتبط به رفتار تعبیر می‌شود. نرخ تصادف فقط بین سن‌های i_1, i_2 ظاهر می‌شود؛ زیرا نرخ است که مربوط به رفتار و وابسته به سن است، اما نرخ پس‌زمینه یک انعکاس کلی از محیط زندگی است. پیشنهاد می‌شود که پارامتر $h_2(i)$ یک تابع افزایشی از i باشد که افزایش قابلیت با بالا رفتن سن فیزیولوژیکی را برای تهدیدات مخاطره انعکاس می‌دهد. برای اولین فرض، $h_2(i)$ را یک تابع توانی به شکل $h_2(i) = i^p \cdot q$ فرض می‌کنیم که q در آن یک پارامتر مقیاس و p یک اندازه اثر نسبی پیری به قابلیت (مردن) است.

پارامتر q_i به صورت زیر بسط داده می‌شود:

$$(۷) \quad q_i = \begin{cases} i^p \cdot q + a + b & i_1 < i \leq i_2 \\ i^p \cdot q + b & \text{درغیراین صورت} \end{cases}$$

در مدل ارائه‌شده یک سن ماکزیمم فیزیولوژیکی برابر n فرض شده است. از لحاظ نظریه، ممکن است لازم نباشد که پیری یک فرایند متناهی باشد، اما هنگامی که n به قدر کافی بزرگ باشد، مدل می‌تواند یک برازش عالی به داده‌ها را فراهم کند و همچنین نیازها برای پیش‌بینی مرگومیر و ارزیابی بیمه را تأمین کند. آزمایشات عددی نشان می‌دهد که اگر n به اندازه ۲۰۰ بزرگ باشد یک برازش خوبی برای مجموعه داده‌ها فراهم می‌کند.

برازش مدل به داده‌های مرگومیر ایران

در این بخش، مدل را برای داده‌های مرگومیر ایران برازش می‌دهیم. همان‌طور که در بخش قبلی بیان شده است، ما فرایند پیری را بر حسب سن‌های فیزیولوژیکی مدل‌بندی می‌کنیم. برای این منظور، داده‌های نسلی، مناسب‌تر از داده‌های مرگومیر دوره‌ای برای برازش مدل هستند. جدول عمر دوره‌ای براساس مرگومیر یک دوره کوتاه‌مدت مثلاً ۱ یا ۳ سال استوار است که به هر حال روند مرگومیر در آن دوره تا حد زیادی یکنواخت است و چون جمعیت مورد مطالعه در آن را افراد متعلق به نسل‌های مختلف تشکیل می‌دهند، نمی‌توان آن را جدول عمر یک نسل واقعی محسوب کرد، بلکه باید آن را ناظر بر افراد یک نسل فرضی متشکل از نسل‌های مختلف دانست که در آن مقطع زمانی بر حسب جنس و سن در معرض میزان‌های مرگومیر خاص قرار می‌گیرند. جدول عمر گروهی یا نسلی، بر مبنای تعقیب زندگی افراد متعلق به یک نسل واقعی یا یک نسل فرضی از تولد تا مرگ ساخته می‌شود و محاسبات آن نیاز به مطالعه افراد در طول زمان دارد. اما در مورد ایران، ما فقط یک جدول عمر داریم، که جدول مرگومیر ۹۰-۸۸ فرانسه با کمی تغییرات است. بنابراین، هیچ انتخابی بین جدول مرگومیر دوره‌ای و نسلی نداریم.

پارامترها در ماتریس انتقال (۱) به‌وسیله مینیمم کردن مجموع مربعات خطای وزنی برآورد می‌شود.

$$(۸) \quad F = \sum_{x=0}^W (q_x - \hat{q}_x)^2 s(x)$$

- در برابری بالا w ماکزیمم سن است که برای داده‌های ایران برابر ۱۰۶ است؛

- q_x و $s(x)$: به ترتیب برابر نرخ مرگ مشاهده‌شده و احتمال بقاء در سن x است؛

- q_x : از جدول عمر به دست می‌آید؛

- $s(x)$: از رابطه $\frac{l_x}{l_0}$ به دست می‌آید؛

- \hat{q}_x : مقدار به دست آمده از مدل متناظر با q_x است.

اگر $\hat{S}(x)$ تابع بقاء زمان مرگ باشد داریم:

$$(۹) \quad \hat{S}(x) = \alpha \exp(\lambda x) e^{-T}$$

- $\exp(\lambda x)$: ماتریس نمایی ماتریس انتقال Λ است؛

احتمال q_x می‌تواند با استفاده از رابطه زیر محاسبه شود:

$$(۱۰) \quad \hat{q}_x = \frac{\hat{s}(x) - \hat{s}(x+1)}{\hat{s}(x)}$$

برآورد پارامترها به‌وسیله استفاده از الگوریتم سیمپلکس^۱ به دست می‌آید که در نرم‌افزار MATLAB نوشته شده است. الگوریتم برای

ترکیب‌های متفاوتی از مقادیر λ_1, λ_2 برای تعیین بهترین فاصله مناسب برای سن فیزیولوژیکی آزمایش شد و در نهایت بهترین برآوردها در

جدول ۱ و ۲ آورده شده است.

جدول ۱: برآورد پارامترهای مدل

پارامترها						
تی دی	$[i_1, i_2]$	λ	ρ	q	B	a
۸۸-۹۰	$]۳۵,۸۶[$	۲/۳۴	۵	$۱۳e-۲/۶۱$	$۰۴e-۱/۴۳$	$۰۳e-۱/۲$

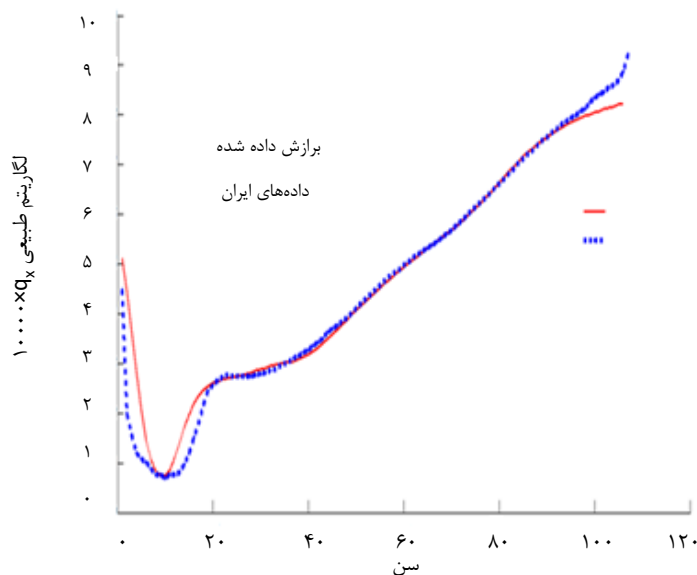
چهار موقعیت برای دوره رشد استفاده شده است که مقادیر به دست آمده برای آنها در جدول ۲ برای داده‌های ایران آورده شده است.

جدول ۲: برآورد پارامترهای دوره رشد مدل

پارامترها							
دوره رشد	λ_{IV}	λ_{III}	λ_{II}	λ_I	q_{IV}	q_{III}	q_{II}
	۱/۲۹۹	۶/۹۹۹	۱/۹۵۶	۲/۲۰۵	۰/۰۰۱۴۹	۰/۰۰۹۹۹	۰/۰۰۱۹۷
							۰/۰۰۱۹۷

^۱. Simplex

منحنی برازش داده شده برای جدول مرگومیر ایران در نمودار ۱ نشان داده شده است.



مدل به بازه سنی ۲۰ تا ۸۰ سال به خوبی برازش داده شده است.
نمودار ۱: منحنی برازش داده شده q_x برای جمعیت ایران

تحلیل نیکویی برازش

در این بخش، از شاخص R^2 برای نیکویی برازش استفاده می‌شود. این اندازه برای نیکویی برازش مدل لی-کارتر نیز استفاده شده است. ضریب R^2 درصدی از واریانس را اندازه‌گیری می‌کند که به وسیله مدل توضیح داده می‌شود. این مقدار بین صفر و یک است. مقدار یک نشان می‌دهد که برازش درست و بی‌عیب است. در مدل ارائه شده مجموع مربعات وزنی کل به وسیله فرمول (۱۱) به دست می‌آید.

$$(11) \quad SST = \sum_{x=0}^{w-1} (q_x - \bar{q}_x)^2 S(x)$$

که $\bar{q} = (\sum_{x=0}^{w-1} q_x) / w$ مجموع مربعات وزنی خطا به وسیله فرمول (۱۲) به دست می‌آید:

$$(12) \quad SSE = \sum_{x=0}^{w-1} (q_x - \hat{q}_x)^2 S(x)$$

پس درصد واریانس توضیح داده شده به وسیله مدل به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(13) \quad R^2 = 1 - \frac{SSE}{SST}$$

مقدار ضریب تعیین مدل ما که به جدول مرگومیر ایران برازش داده شده است برابر 0.99 به دست آمد. مقدار به دست آمده برای داده‌ها خیلی نزدیک یک است، که این امر نشان می‌دهد که مدل ارائه شده تقریباً همه تغییرات نرخ‌های مرگ را برای همه سن‌ها توضیح داده است. معمولاً یک مقدار ضریب تعیین بزرگ‌تر از 0.9 رضایت‌بخش مطرح شده است.

تجزیه و تحلیل‌های دیگری از مدل

یکی از مزایای استفاده از توزیع‌های فاز-نوع در تجزیه و تحلیل بقاء است. در مدل ما، t سن فیزیولوژیکی یک فرد در سن تقویمی t را ارائه می‌کند. $P_i(t)$ احتمال این است که فرد در سن تقویمی t سن فیزیولوژیکی i را دارد، یعنی:

$$P_i(t) = P(J_t = i, T > t) \quad t \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$$

پس، برای $P_i(t) = [\alpha \exp(\Lambda t)]_i$ ، $i = 1, 2, \dots, n$ که $[\cdot]$ ، i امین مؤلفه بردار $[\cdot]$ است. به طور واضح تابع بقاء $S(t)$ می‌تواند به این صورت

$$S(t) = \sum_{i=1}^n P_i(t)$$

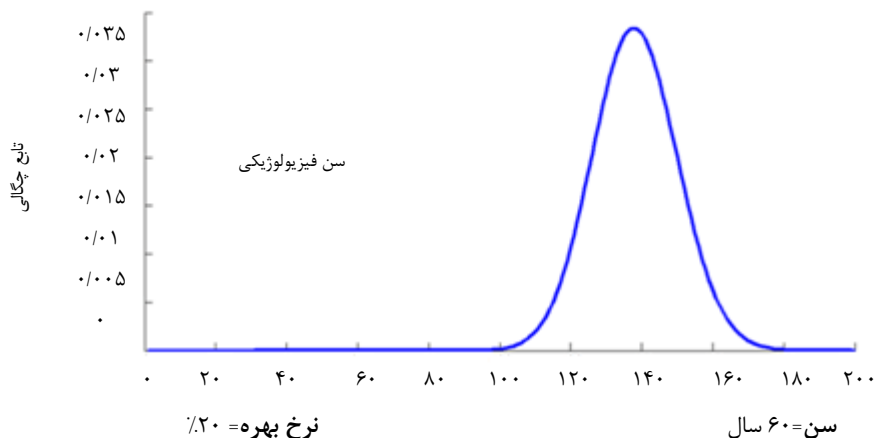
حال احتمال شرطی متناظر با آن را بررسی می‌کنیم یعنی:

$$\pi_i(t) = p(J_t = i | T > t)$$

که برابر است با:

$$(14) \quad \pi_i(t) = \frac{P_i(t)}{S(t)} = \left[\frac{\alpha \exp(\lambda t)}{\alpha \exp(\lambda t) e} \right]_i$$

توزیع $\pi(t) = [\pi_1(t), \pi_2(t), \dots, \pi_n(t)]$ ممکن است برای توصیف ناهنجاری یا ضعف در موقعیت‌های سلامتی افراد یک نسل در سن t استفاده شود، که ناهنجاری به‌وسیله سن فیزیولوژیکی اندازه‌گیری شده است.



نمودار ۲: توزیع ناهمگنی برای جدول عمر ایران برای سن ۶۰ سال

در نمودار ۲، توزیع $\pi(t)$ را برای سن ۶۰ سالگی برای جدول مرگ‌ومیر ایران رسم کرده‌ایم. این نمودار نشان می‌دهد که یک فرد ۶۰ ساله در بازه $[100-180]$ از نظر سن فیزیولوژیکی قرار دارد. در اینجا می‌خواهیم رابطه بین مرگ آنی و نرخ جذب q_i که نرخ مرگ در سن فیزیولوژیکی A است را مشخص کنیم. از رابطه (۲)، (۳) شدت مرگ‌ومیر، $\mu(t)$ به‌وسیله رابطه زیر ارائه شده است:

$$(15) \quad \mu(t) = \frac{\alpha \exp(\lambda t) q}{\alpha \exp(\lambda t) e}$$

پس، با استفاده از فرمول (۱۰) داریم:

$$(16) \quad \mu(t) = \sum_{i=1}^n q_i \cdot \pi_i(t)$$

حال فرض کنید، که نرخ‌های جذب q_i ها یک تغییر ثابت یا اختلالی به اندازه ϵ دارند. یعنی نرخ‌های جذب جدید تا زمانی که دیگر پارامترها تغییر نکنند برابر $q_i^\epsilon = q_i + \epsilon$ برای همه i هستند. در این مورد هنگامی که نرخ مرگ پس‌زمینه b به $b + \epsilon$ تغییر کند، $(\alpha, \lambda^\epsilon)$ پارامتر جدیدی متناظر با فاز- نوع است. پس داریم:

$$(17) \quad \lambda^\epsilon = \lambda - \epsilon I$$

پس:

$$(18) \quad e^{\lambda^\epsilon t} = e^{(\lambda - \epsilon I)t} = e^{-\epsilon t} e^{\lambda t}$$

بنابراین تابع بقاء $S^\epsilon(t)$ با اختلال می‌تواند به‌صورت زیر بیان شود:

$$(19) \quad S^\epsilon(t) = e^{-\epsilon t} S(t)$$

شدت مرگ‌ومیر $\mu^\epsilon(t)$ با استفاده از رابطه (۱۶) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$(20) \quad \mu^\epsilon(t) = \sum_{i=1}^n q_i^\epsilon \cdot \pi_i(t) = \sum_{i=1}^n q_i \cdot \pi_i(t) + \sum_{i=1}^n \epsilon \cdot \pi_i(t) = \mu(t) + \epsilon$$

پس، اگر نرخ‌های جذب به اندازه ϵ افزایش یابند (کاهش یابند) بنابراین مرگ آنی نیز به اندازه ϵ افزایش (کاهش) خواهد یافت.

اما جالب است بدانید زمانی که ناهمگنی را اندازه‌گیری می‌کنیم توزیع $\pi(t)$ بدون تغییر باقی می‌ماند یعنی:

$$\pi^{\varepsilon}(t) = \frac{\alpha e^{\Lambda t}}{\alpha \exp(\Lambda t) e} = \frac{\alpha e^{\Lambda t}}{\alpha \exp(\Lambda t) e} = \pi(t)$$

ایده تغییر نرخ‌های جذب q_i برای تعیین سرشار حق بیمه خالص بیمه یا مستمری مفید است. اگر نرخ جذب را با $\%1$ ثابت افزایشی یا کاهش‌ی ε_i فرض کنیم یعنی $q_i^{\varepsilon} = q_i + \varepsilon_i$ که همانند یک سرشار مرگ‌ومیر برای سن فیزیولوژیکی i در نظر گرفته می‌شود. در نتیجه، همه محاسبات حق بیمه‌ها می‌توانند در روشی مشابه انجام شوند.

محاسبات اکچوئری

حال، با استفاده از دو روش می‌خواهیم ارزش فعلی بیمه تمام‌عمر یعنی A_x و ارزش فعلی مستمری تمام‌عمر یعنی \ddot{a}_x را محاسبه کنیم. یکی با استفاده از مدل‌مان و دیگری با استفاده مستقیم از جدول عمر است. در این مرحله، از جدول عمر ایران که همان جدول تی دی ۹۰-۸۸ فرانسه است، استفاده می‌کنیم و مقادیر A_x و \ddot{a}_x را مستقیماً به دست می‌آوریم. برای به دست آوردن A_x در این مقاله، از فرمول (۲۱) که یک رابطه بازگشتی است استفاده می‌کنیم:

$$(21) \quad A_x = \theta q_x + \theta p_x A_{x+1}$$

که:

$$A_{106} = \theta \quad \text{و} \quad p_{106} = 0$$

در نتیجه مقادیر $A_0, A_{104}, \dots, A_{105}$ با استفاده از رابطه بازگشتی (۲۱) محاسبه می‌شوند و همچنین با دانستن رابطه میان A_x و \ddot{a}_x که به صورت رابطه (۲۲) است می‌توان مقادیر متناظر با \ddot{a}_x را نیز محاسبه کرد.

$$(22) \quad \ddot{a}_x = \frac{1 - A_x}{d}$$

اما برای دومین قسمت، یعنی استفاده از مدل، دو فرمول زیر را داریم که این فرمول‌ها یا حل انتگرال مربوط به \bar{A}_x و \bar{a}_x و استفاده از این خاصیت که زمان مرگ از توزیع فاز- نوع پیروی می‌کند و خواص مربوط به این ویژگی به دست می‌آیند:

$$(23) \quad \bar{A}_x = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \pi(t) \exp(\Lambda t) b^T dt = -\pi(x)(\Lambda - \delta I)^{-1} b^T$$

$$\bar{a}_x = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \pi(x) \exp(\Lambda t) e^T dt = -\pi(x)(\Lambda - \delta I)^{-1} e^T$$

حال که فرمول‌های استفاده شده برای هر دو قسمت را بیان کردیم اکنون می‌توانیم این روش‌ها را برای جدول مرگ‌ومیر ایران اعمال کرده و نتایج را مقایسه کنیم.

جدول ۳: محاسبات ارزش فعلی بیمه تمام زندگی با نرخ $\%20$

نرخ بهره	سن X	مقدار به دست آمده برای A_x توسط جدول عمر	مقدار به دست آمده برای A_x توسط مدل	اختلاف مقادیر
	۳۰	۰/۰۱۹۹۹	۰/۰۱۲۲۴	-۰/۰۰۷۷۵
	۴۰	۰/۰۲۳۶۸	۰/۰۲۲۳۶	-۰/۰۰۱۳۱
$\%20$	۵۰	۰/۰۵۱۶۹	۰/۰۴۹۹۹	-۰/۰۰۰۱۷
	۶۰	۰/۱۰۲۵۳	۰/۱۰۱۰۰	-۰/۰۰۱۵۳
	۷۰	۰/۱۹۳۲۶	۰/۱۹۱۷۳	-۰/۰۰۱۵۳

در جدول ۳ ارزش فعلی بیمه تمام‌عمر به وسیله ۲ روش و اختلاف بین این دو ارائه شده است. تفاوت اندک بین این مقادیر مشهود است که نشان می‌دهد که مدل به خوبی به داده‌ها برازش داده شده است.

جدول ۴: محاسبات ارزش فعلی مستمری با نرخ ۲۰٪

اختلاف مقادیر	مقدار به‌دست‌آمده برای \ddot{a}_x توسط مدل	مقدار به‌دست‌آمده برای \ddot{a}_x توسط جدول	سن X	نرخ بهره
-۰/۴۶۸۹۰	۵/۴۱۱۱۶	۵/۸۸۰۰۶	۳۰	
-۰/۵۰۷۶۸	۵/۳۵۰۲۷	۵/۸۵۷۹۵	۴۰	
-۰/۵۰۵۸۱	۵/۱۸۴۰۳	۵/۶۸۹۸۵	۵۰	۲۰٪
-۰/۵۰۷۷۱	۴/۸۷۷۱۳	۵/۳۸۴۸۴	۶۰	
-۰/۵۰۹۲۲	۴/۳۳۱۲۵	۴/۸۴۰۴۷	۷۰	

نتایج و بحث

در این مقاله، توزیع فاز- نوع که براساس فرایند مارکوف پیوسته با یک موقعیت جذب (مرگ) است برای مدل‌بندی جدول مرگ‌ومیر ایران استفاده شده است. در توزیع فاز- نوع هریک از موقعیت‌های فرایند مارکوف برابر با یک سن فیزولوژیکی انسان است که موقعیت جذب نیز همان مرگ است. ساختار خاص این مدل براساس ماتریس انتقال فرایند مارکوف شناسایی می‌شود. چنان‌که فرایند با یک مکانسیم پیری ارتباط داشته باشد برآورد دقیق پارامترهای ماتریس برای برازش دادن مدل امری لازم است. به‌علاوه استفاده از فرایند مارکوف پیوسته متناهی ما را مطمئن می‌کند که زمان مرگ از توزیع فاز- نوع پیروی می‌کند. در نتیجه، با دانستن توزیع زمان مرگ می‌توان از چگالی، گشتاور و... زمان مرگ آگاهی پیدا کرد و همچنین بسیاری از روش‌های تحلیلی که برای توزیع فاز- نوع به‌کار می‌رود را می‌توان برای مدل مرگ‌ومیر ارائه‌شده بسط داد. استفاده از توزیع فاز- نوع این مزیت را دارد که می‌توان براساس عبارات‌های بسته، قیمت‌گذاری بیمه عمر و مستمری را انجام داد.

جمع‌بندی و پیشنهادها

با توجه به نظر کارشناسان بیمه مرکزی ج.ا.ا از آنجایی که سبک زندگی ایران را می‌توان هم رده سبک زندگی فرانسه دانست، جدول مرگ‌ومیر استفاده‌شده در ایران برای محاسبات، جدول مرگ‌ومیر تی دی ۹۰-۸۸ فرانسه با اعمال کمی تغییرات در نرخ‌های آن است. با اینکه زنجانی و نورالهی (۱۳۷۹) به ایجاد جدول مرگ‌ومیر در ایران پرداختند ولی هنوز جدولی که بتواند به‌طور کامل متناسب با ایران باشد، وجود ندارد. لذا استفاده از این مدل جهت برازش دادن به جدول مرگ‌ومیر برای سال‌های مختلف و مقایسه آنها جهت پیشگویی امکان ندارد، از این رو پیشنهاد انتخاب جداول مرگ‌ومیر از فرانسه^۱ و برازش مدل به آنها و به‌دست‌آوردن مقادیر پارامتر می‌تواند تصویری از روند مرگ‌ومیر جاری در ایران را نشان دهد و پیشگویی را برای ایران ممکن سازد.

منابع و ماخذ

زنجانی، ح.الف. نورالهی، ط.، (۱۳۷۹). جدول مرگ‌ومیر ایران برای سال ۱۳۷۵، تهران: مؤسسه پژوهشی تأمین اجتماعی.

Austad, S.N., (1997). Why we age: what science is discovering about the body's journey through life, New York: John Wiley & Sone.

Bafitis, H.; Sargent, F., (1977). Human physiological adaptability through the life sequence. Journal of gerontology, 32, pp. 402-10.

^۱ در سایت <http://www.mortality.org> درج شده است.

- Bowers, N.L.; Gerber, H.U.; Hickman, J.C.; Jones, D.A.; Nesbitt, C.J., (1997). Actuarial mathematics, The Society of Actuaries, Schaumburg, Illionis, 2nd ed.
- Drekic, S.; Dickson, D.; Stanford, D.; Willmot, G., (2004). On the distribution of the deficit at ruin when claims are phase-type. Scandinavian Actuarial Journal, 2, pp. 105-20.
- Erlang, A.K., (1909). Sandsynlighedsregning og telefonsamtaler (in Danish: translated: The theory of probabilities and telephone conversations). Nyt tidsskrift for Matematik (in Danish: translated: New Journal of Mathematics, 20, pp. 33-9.
- Erlang, A.K., (1917). Solution of some problems in the theory of probabilities of significance in automatic telephone exchanges. The Post Office Electrical's Journal, 10, pp. 189-97.
- Hassan Zadeh, A.; Jones, B.; Stanford, D., (2013). The use of phase-type models for disability insurance calculations. Scandinavian Actuarial Journal. Doi of the Paper Is: 10.1080/03461238.2012.761645.
- Jensen, A., (1953). A distribution model applicable to economics. Munksgaard, Copenhagen.
- Jones, H., (1956). A special consideration of the aging process, Disease and Life Expectancy, 4 of Advances in Biological and Medical Physics, J.H.Lawrence and C.A. Tobias(eds.), Academic Press Inc, NewYork, pp. 281-337.
- Lee, R.D.; Carter, L.R., (1992). Modelling and forecasting U.S. mortality. Journal of the American Statistical Association, 14, pp. 659-75.
- Lin, X.S.; Liu, X., (2007). Markov aging process and phase-type law of mortality. North American Actuarial Journal. 11(4), pp. 92-109.
- Neuts, M.F., (1981). Matrix-geometric solutions in stochastic models: An algorithmic approach. The John Hopkins University Press, Baltimore.
- Shock, N., (1974). Physiological theories of aging. Theoretical aspects of aging, M. Rockstein (Ed.), Academic Press, New York, pp. 119-36.
- Strehler, B.L., (1999). Time, Cells, and Aging, Demetriades Brothers, Larnaca.
- Yashin, A.I., (2001). Mortality models incorporating theoretical concepts of ageing. Forecasting Mortality in Developed Countries, E. Tabeau, A. van den Berg Jeths, C.Heathcote (eds.), Springer Netherlands: Kluwer Academic Publishers, pp. 261-80.