



ORIGINAL RESEARCH PAPER

Iran mortality rates using Lee-Carter model: Estimation and forecasting

A. Komijani, M. Koosheshi, L. Niakan*

Department of Economic Sciences, University of Tehran, Tehran, Iran

ARTICLE INFO

Article History

Received: 22 September 2013

Revised: 27 October 2013

Accepted: 27 January 2014

Keywords

Life expectancy; Age specific mortality rate; Lee-Carter model; Mortality prediction methods.

ABSTRACT

Mortality forecasts are made in two ways: one is indirect forecasting through life expectancy forecasting and then converting it to age-specific death rate, and the second is direct forecasting of mortality rates. In the first approach, it is usually assumed that in the post-transition period (which is usually a level higher than 70 years for life expectancy at birth), the increase in life expectancy slows down, and as it approaches the exponential, its increase will be insignificant. In the second approach, the age-specific death rate is predicted and the life expectancy is obtained using the direct method of building the life table. As a rule, the logical and correct method of estimating or predicting life expectancy is the second approach. In addition, the indirect method has difficulties and generally larger errors. The purpose of this article is to use the second approach, and in this direction, using Iran's mortality data, the Lee-Carter model is used to predict the mortality rate. This model is based on two main elements: one is time and the other is age. The strict and important assumption of the model is the relative stability of the age-of-death pattern, and various evaluations have shown that in these conditions, the error of the Lee-Carter model is lower than any other method for directly predicting the mortality rate. In the case of Iran, the estimates show that the estimation error is insignificant, although this element is higher in some ages. Testing the hypothesis of the stability of Iran's mortality age pattern is an assumption that can be the subject of further research.

*Corresponding Author:

Email: leili.niakan@yahoo.com

DOI: [10.22056/ijir.2013.04.01](https://doi.org/10.22056/ijir.2013.04.01)



برآورد و پیش‌بینی نرخ مرگ‌ومیر در ایران با استفاده از مدل لی-کارت

اکبر کمیجانی، مجید کوششی، لیلی نیاکان*

گروه علوم اقتصادی، دانشگاه تهران، تهران، ایران

اطلاعات مقاله

تاریخ دریافت: ۳۱ شهریور ۱۳۹۲

تاریخ داوری: ۰۵ آبان ۱۳۹۲

تاریخ پذیرش: ۰۷ بهمن ۱۳۹۲

چکیده:

پیش‌بینی‌های مرگ‌ومیر از دو طریق انجام می‌شود: یکی پیش‌بینی غیرمستقیم و از طریق پیش‌بینی امید به زندگی و سپس تبدیل آن به نرخ مرگ ویژه سنی و دوم پیش‌بینی مستقیم نرخ‌های مرگ‌ومیر. در رویکرد اول معمولاً چنین تصور می‌شود که در دوره پس از گذار (که معمولاً سطحی بالاتر از ۷۰ سال برای امید به زندگی در بدو تولد است)، افزایش امید به زندگی کند می‌شود و هرچه به مجانب نزدیک شود افزایش آن ناچیز خواهد بود. در رویکرد دوم نرخ مرگ ویژه سنی پیش‌بینی و با استفاده از روش مستقیم ساختن جدول عمر، امید به زندگی به دست می‌آید. قاعدتاً روش منطقی و درست برآورد یا پیش‌بینی امید به زندگی رویکرد دوم است. افزون بر این، روش غیرمستقیم دشواری‌ها و عموماً خطاهای بزرگ‌تری دارد. هدف این مقاله استفاده از رویکرد دوم است و در این جهت با استفاده از داده‌های مرگ‌ومیر ایران از مدل لی-کارت برای پیش‌بینی نرخ مرگ‌ومیر استفاده می‌شود. این مدل بر دو عنصر اصلی مبتنی است: یکی عنصر زمان و دیگری عنصر سنی. مفروض سخت و مهم مدل، ثبات نسبی الگوی سنی مرگ است و ارزیابی‌های مختلف نشان داده است که در این شرایط خطای مدل لی-کارت نسبت به هر روش دیگری برای پیش‌بینی مستقیم نرخ مرگ‌ومیر کمتر است. در مورد ایران نیز برآوردها نشان می‌دهد که خطای برآورد، مقدار ناچیزی است، هرچند این عنصر در برخی سنین بیشتر است. آزمون فرضیه ثبات الگوی سنی مرگ‌ومیر ایران، مفروضی است که می‌تواند موضوع تحقیقات بعدی باشد.

کلمات کلیدی

امید به زندگی

نرخ مرگ‌ومیر ویژه سنی

مدل لی-کارت

روش‌های پیش‌بینی مرگ‌ومیر

*نویسنده مسئول:

ایمیل: leili.niakan@yahoo.com

DOI: 10.22056/ijir.2013.04.01

پیش‌بینی‌های جمعیتی یا محاسبات بیمه‌ای جهت مطالعه و بررسی تعهدات بلندمدت سازمان تأمین اجتماعی، صندوق‌های بازنشستگی و شرکت‌های عرضه‌کننده بیمه عمر، مستلزم دسترسی به آمار و اطلاعات قابل اعتماد است. یکی از اطلاعات بسیار مهم و مؤثر در این زمینه، جدول مرگومیر مناسب است که باید منعکس‌کننده وضع کنونی و ادامه حیات جمعیت باشد. جداول مرگومیری که تاکنون برای جمعیت ایران تدوین شده، بسیار قدیمی بوده و با اشکالات روش‌شناسی و محاسباتی مواجه‌اند (زنجانی و نوراللهی، ۱۳۷۹). به همین دلیل تاکنون سازمان‌ها و مؤسسات بیمه‌ای برای رفع نیاز خود، جداول عمر مربوط به کشورهای را که با ساختار سنی جمعیت کشور ما مشابهت داشته است، پس از انجام تغییراتی مورد استفاده قرار داده‌اند.

برای ساختن جدول عمر به نرخ‌های مرگومیر ویژه سنی^۱ (m_x) برای همه سنین x نیاز است. با اتکا به نرخ‌های مرگومیر می‌توان کل عناصر جدول را به دست آورد. منحنی نرخ لحظه‌ای مرگومیر برای همه انسان‌ها از مدل یکسانی پیروی نمی‌کند. مدل‌سازی مرگومیر تاریخچه طولانی دارد. در این زمینه مدل‌هایی توسط دمویور^۲، گمپرتز^۳، میکهام^۴، پرکز^۵ و هلیگمن و پولارد^۶ پیشنهاد شده است. مدل‌های مرگومیر برای یکنواخت کردن (ارتقا^۷) و برازش نرخ‌های مرگومیر مشاهده شده به کار می‌روند.

برخلاف مدل‌سازی نرخ مرگومیر، پیش‌بینی نرخ مرگومیر پیشینه کوتاه‌تری دارد. تا دو دهه قبل، روش‌های مورد استفاده برای پیش‌بینی مرگومیر نسبتاً ساده بوده و تا حدودی بر اساس قضاوت‌های ذهنی انجام می‌شد و تنها پس از آن بود که روش‌های پیچیده‌تر توسعه یافته و به کار گرفته شدند. لازمه پیش‌بینی مرگومیر، تصریح یک مدل پایه از داده‌ها و تصریح مدلی برای پیش‌بینی است. این مدل‌ها ممکن است مجزا از هم بوده یا در یک چهارچوب منفرد یکپارچه شوند. سه متغیر یا عامل سن^۸، دوره^۹ (یا زمان) و گروه هم‌آغاز^{۱۰} برای طبقه‌بندی مدل پایه به صورت صفر، یک، دو یا سه عاملی به کار می‌روند (Tabeau, 2001). اغلب روش‌های جدید پیش‌بینی مرگومیر از مدل‌های دو عاملی با دو عامل سن و دوره استفاده می‌کنند. انتخاب مدل پایه ارتباط نزدیکی با تعیین رویکرد و روش خاص پیش‌بینی دارد. این انتخاب به معیارهای متعددی از قبیل دسترس‌پذیری داده‌ها، هدف پیش‌بینی و افق پیش‌بینی بستگی دارد. روش‌های جدید پیش‌بینی از برون‌یابی سری زمانی استفاده می‌کنند که مستلزم وجود سری‌های مفصل از داده‌هاست.

یکی از مدل‌های دو عاملی برای پیش‌بینی مرگومیر، مدل لی-کارت^{۱۱} است (Lee and Carter, 1992). این مدل را می‌توان با استفاده از مؤلفه‌های اصلی^{۱۲} تخمین زد و با استفاده از تجزیه ماتریس^{۱۳}، مؤلفه‌های مستقل مرگومیر و همچنین الگوهای سنی و اهمیت آنها در طول زمان را شناسایی کرد. در حال حاضر روش لی-کارت در پیش‌بینی مرگومیر، روش پیشروی است.

معرفی مدل لی-کارت

مدل تصادفی پیشنهاد شده توسط لی و کارت^{۱۴} در میان کارشناسان بیمه و جمعیت‌شناسان شهرت یافته است که دلیل این امر عملکرد نسبتاً خوب این مدل در برآورد نرخ مرگومیر است. روش لی-کارت به عنوان یک روش برون‌یابی، ترکیبی از یک مدل جمعیت‌شناسی غنی (با کمترین پارامتر) و روش‌های سری زمانی است.

1. Age-Specific Mortality Rate

2. De Moivre

3. Gompertz

4. Makeham

5. Perks

6. Helligman and Pollard

7. Graduation

8. Age

9. Period

10. Cohort

11. Lee - Carter

12. Principal Components

13. Matrix Decomposition

14. Lee and Carter, 1992

اگر چه در این روش همانند سایر روش‌های برون‌یابی، اطلاعات پیرامون تأثیرات حاصل از پیشرفت‌های پزشکی، رفتاری یا اجتماعی روی نرخ مرگومیر لحاظ نمی‌شود، به چند دلیل استفاده از آن بر سایر روش‌های برون‌یابی برتری دارد. اول، بخش زیادی از تغییرات در نرخ مرگومیر کل جمعیت در کشورهای توسعه‌یافته به کمک این مدل پوشش داده می‌شود؛ دوم، پارامترهای مدل به‌سادگی قابل تفسیر هستند؛ سوم، این روش علاوه بر پیش‌بینی تکی (نقطه‌ای) نرخ‌های مرگومیر قادر به ارائه بازه‌های اطمینان متناظر با آنها نیز است. در متون جمعیت‌شناسی از این روش به‌عنوان «مدل آماری برجسته در پیش‌بینی بلندمدت نرخ مرگومیر کل جمعیت» یاد شده است (Deaton and Pakson, 2004).

ساختار مدل

نرخ خام مرگومیر در سن x و زمان t در یک جامعه با $m(x,t)$ نشان داده می‌شود و از طریق این رابطه محاسبه می‌گردد:

$$m(x,t) = \frac{d_{x,t}}{L_{x,t}}, t = t_1, t_1+1, \dots, t_1+T-1, x = x_1, x_2, \dots, x_N \quad (1)$$

که در آن، $d_{x,t}$ و $L_{x,t}$ به ترتیب بیانگر تعداد افراد فوت‌شده و جمعیت در معرض واقعه فوت در سن x و زمان t برای آن جامعه، t_1 نخستین زمان و N تعداد سن یا گروه‌های سنی تحت مطالعه می‌باشد.

در عمل، نرخ مرگومیر از تقسیم تعداد متوفیات هر سن بر جمعیت میانه آن سن به‌دست می‌آید. جمعیت میانه هر سن در واقع برآوردی از جمعیت در معرض مرگ است که از نتایج سرشماری‌های نفوس و مسکن به‌دست می‌آید.

ساختار مدل پیشنهادی لی-کارتر به این صورت بیان می‌شود:

$$\ln m(x,t) = a_x + b_x k_t + \varepsilon_{x,t} \quad (2)$$

$\ln m(x,t)$ برابر با لگاریتم طبیعی نرخ مرگومیر مشاهده‌شده در سن x در سال t و a_x ، b_x و k_t به ترتیب پارامترهای وابسته به سن و زمان هستند. a_x متوسط زمانی لگاریتم نرخ مرگومیر در سن x است، به‌عبارت‌دیگر، $\exp(a_x)$ شکل کلی منحنی نرخ مرگومیر را نشان می‌دهد؛ مؤلفه k_t شاخص مرگومیر^۱ در سال t است که روند اصلی موجود در لگاریتم طبیعی نرخ مرگومیر تمامی سنین در طول زمان را نشان می‌دهد؛ و b_x بیانگر میزان تغییرات در لگاریتم نرخ مرگومیر سن x به‌ازای تغییر در شاخص مرگومیر در طول زمان است. به‌عنوان مثال، مقدار این پارامتر برای گروه سنی نوزادان و کودکان بیشتر از گروه سنی سالمندان است. بنابراین، این دو گروه با تغییر در شاخص مرگومیر به‌ترتیب تحت تأثیر بیشترین و کمترین تغییر خواهند بود (Lee and Carter, 1992). مؤلفه $\varepsilon_{x,t}$ نیز برابر با مؤلفه خطا در سن x و زمان t است. براساس رابطه (۲) می‌توان نوشت:

$$\frac{d}{dt} \ln m(x,t) = b_x \left(\frac{d}{dt} k_t \right) \quad (3)$$

براساس رابطه (۳) اگر شاخص مرگومیر k_t در طول زمان به‌طور خطی کاهش یابد، $\frac{d}{dt} k_t$ ثابت بوده و نرخ مرگومیر ویژه سنی با نرخ نمایی ثابت خود کاهش خواهد یافت.

عبارت خطای $\varepsilon_{x,t}$ دارای توزیع گوسی با میانگین صفر و واریانس σ_ε^2 و بیانگر بخشی از تغییرات نرخ مرگومیر ویژه سنی است که توسط مدل توضیح داده نمی‌شود. لی و کارتر معتقدند که پارامتر k_t عمده پراکندگی در داده‌ها را پوشش داده و در نتیجه، واریانس عبارت خطا در طول زمان ثابت است (Lee, 2000).

برازش مدل

در مدل لی-کارتر هیچ متغیر توضیحی در سمت راست این رابطه وجود ندارد. بنابراین، مدل را نمی‌توان با استفاده از روش‌های رایج رگرسیونی برازش کرد.

بنابراین، برای یافتن یک مجموعه جواب یکتا برای پارامترهای مدل، دو قید زیر به مدل اعمال می‌شود:

$$\sum_{t=t_1}^{t_1+T-1} k_t = 0, \quad \sum_{x=x_1}^{x_N} b_x = 1 \quad (4)$$

1. Mortality Index

قید اول بیانگر آن است که مجموع انحرافات از روند کلی مرگومیر در بازه زمانی $[t_1, t_1+T-1]$ صفر در نظر گرفته می‌شود. قید دوم نشان می‌دهد که مجموع پاسخ‌های گروه‌های سنی به تغییراتی در شاخص مرگومیر در اول یا استقلال از مدل با واحد k_t (یا هر مقدار انتخابی دیگر) خواهد بود (آل حسینی، ۱۳۹۱). گیروسی و کینگ^۱ در مقاله خود به جای قید دوم، از قید $\sum_{x=x_1}^{x_N} b_x^2 = 1$ استفاده کرده‌اند که مفهوم یکسانی با قید پیشنهادی لی-کارتز داشته است و تغییری در برازش مدل ایجاد نمی‌کند. چنانچه نرخ خام مرگومیر کل جمعیت در هر گروه سنی و برای کلیه سال‌های t_1 تا t_1+T-1 در اختیار باشد، برآورد حداقل مربعات خطای پارامترهای رابطه (۲) به این صورت محاسبه می‌شود:

$$Q(a_x, b_x, k_t) = \sum_{x,t} \varepsilon_{x,t}^2 = \sum_{x,t} (\text{Ln}(m_{x,t}) - a_x - b_x k_t)^2 \quad (5)$$

خواهیم داشت: $\frac{\partial Q}{\partial a_x} = \frac{\partial Q}{\partial b_x} = \frac{\partial Q}{\partial k_t} = 0$ با قرار دادن

$$\frac{\partial Q}{\partial a_x} = -2 \sum_t (\text{Ln}(m_{x,t}) - a_x - b_x k_t) = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial b_x} = -2 \sum_t (\text{Ln}(m_{x,t}) - a_x - b_x k_t) k_t = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial k_t} = -2 \sum_x (\text{Ln}(m_{x,t}) - a_x - b_x k_t) b_x = 0$$

براساس رابطه (۶) و قید اول رابطه (۴) برآورد حداقل مربعات معمولی برای a_x به دست می‌آید:

$$\hat{a}_x = \frac{1}{T} \sum_{t=t_1}^{t_1+T-1} \text{Ln}(m_{x,t}) \quad (7)$$

لی و کارتز جهت تخمین حداقل مربعات معمولی پارامترهای b_x و k_t از تقریب درجه اول روش تجزیه ارزش منفرد^۲ استفاده کردند. روش کار چنین است:

چنانچه ماتریس $Z_{ij} = Z(x_i, t_j) = \text{Ln}(m_{x_i, t_j}) - \hat{a}_{x_i} = b_{x_i} k_{t_j}$ را برای $i=1, \dots, N$ و $j=1, \dots, T$ تعریف کنیم، براساس فیود ذکر شده می‌توان این دو رابطه را برای b_x و k_t به دست آورد:

$$\sum_t Z(x, t) k_t = \sum_t (\text{Ln}(m_{x,t}) - \hat{a}_x) k_t = \sum_t (b_x k_t) k_t = b_x \sum_t k_t^2 \quad (8)$$

$$\sum_x b_x Z(x, t) = \sum_x b_x (\text{Ln}(m_{x,t}) - \hat{a}_x) = \sum_x b_x (b_x k_t) = k_t \sum_x b_x^2 = k_t \quad (9)$$

رابطه (۹) با توجه به قید گیروسی و کینگ به دست آمده است. اگر در رابطه (۸) عبارت $\sum_t k_t^2 = \beta$ را جایگزین کنیم، براساس نمایش ماتریسی خواهیم داشت:

$$(10) Zk = \beta b, Z'b = k$$

داریم: Z است. بنابراین، با ضرب رابطه (۱۰) در Z ترانزاده ماتریس Z و $k = \begin{pmatrix} k_{t1} \\ \vdots \\ k_{tT} \end{pmatrix}'$ و $b = \begin{pmatrix} b_{x1} \\ \vdots \\ b_{xN} \end{pmatrix}$ که در آن

$$(ZZ')b = Zk = \beta b \quad (11)$$

از این رو، براساس فرض $(bb') = \sum_{x=x_1}^{x_N} b_x^2 = 1$ و $(kk') = \sum_t k_t^2 = \beta$ ، بردار منفرد^۳ ماتریس (ZZ') با مقدار منفرد^۴ β است.

اکنون با جایگذاری در رابطه (۵) و با استفاده از فرض گفته شده، می‌توان نوشت:

$$Q(b_x, k_t) = \sum_{x,t} \varepsilon_{x,t}^2 = \sum_{x,t} (\text{Ln}(m_{x,t}) - \hat{a}_x - b_x k_t)^2$$

1. Girosi and King, 2007

2. Single Value Decomposition (SVD)

3. Singular Vector

4. Singular Value

$$= \sum_{x,t} (Z(x,t) - b_x k_t)^2 - \beta \sum_{x,t} Z(x,t)^2 \quad (12)$$

در این صورت، حداقل کردن معادل حداکثر کردن β خواهد بود. براساس تقریب درجه اول روش تجزیه ارزش منفرد، β اولین مقدار منفرد و b_x اولین بردار منفرد ماتریس ZZ' خواهد بود. طبق تعریف تجزیه ارزش منفرد می توان نوشت (Baker, 2005):

$$\text{SVD}(Z(x,t)) = U_{N \times N} L_{N \times T} V'_{T \times T} = U_{x \times 1} L_1 V'_{t \times 1} + \dots + U_{x \times N} L_N V'_{t \times T} \quad (13)$$

در رابطه فوق، بردارهای منفرد ماتریس ZZ' ، تشکیل دهنده ستون های ماتریس متعامد U و بردارهای منفرد ماتریس $Z'Z$ ، تشکیل دهنده ستون های ماتریس متعامد V بوده و ماتریس L براساس مقادیر منفرد ماتریس Z تشکیل می شود. بنابراین، با تقریب درجه اول تجزیه ارزش منفرد خواهیم داشت:

$$\hat{b}_x = U_{x \times 1}, \hat{k}_t = L_1 V_{t \times 1} \quad (14)$$

که در آن:

$$U_{x \times 1} = \begin{pmatrix} u_{x_1,1} \\ \vdots \\ u_{x_k,1} \end{pmatrix}, L_1 = [1, 0, \dots, 0]' \text{ و } V_{t \times 1} = \begin{pmatrix} v_{t_1,1} \\ \vdots \\ v_{t_n,1} \end{pmatrix}$$

پیش بینی نرخ مرگومیر

پس از برآورد پارامترهای مدل و برآورد نرخ های مرگومیر ویژه سنی با استفاده از مدل لی-کارتر، نوبت به پیش بینی نرخ مرگومیر می رسد. برای این منظور، لی و کارتر¹ ابتدا به مدل بندی سری زمانی k_t پرداخته و سپس با پیش بینی مقادیر k_t ، مقادیر نرخ مرگومیر $m(x,t)$ را برای هر گروه سنی و در هر زمان خاص پیش بینی کردند. برای انجام پیش بینی، در مرحله اول k_t به کمک سری های زمانی مدل سازی شده و مقادیر آتی آن پیش بینی می شود. یافتن بهترین مدل برای k_t بسیار اهمیت دارد، زیرا یک مدل نامناسب منجر به پیش بینی نادرست رفتار آتی نرخ های مرگومیر خواهد شد. این مدل مناسب با استفاده از روش شناسایی باکس-جنکینز² انتخاب خواهد شد.

تحقیقاتی که در حوزه مدل سازی نرخ مرگومیر با استفاده از روش لی-کارتر در کشورهای توسعه یافته انجام گرفته است، حاکی از آن است که یک مدل گام تصادفی با رانش³ به خوبی k_t را مدل سازی کرده و عمده تغییرات در داده های نرخ مرگومیر ویژه سنی به کمک این مدل پوشش داده می شود. این مدل حاصل اتخاذ یک فرایند تکراری برون یابی برای پارامتر k_t است. مدل گام تصادفی با رانش برای k_t به این صورت بیان می شود:

$$k_t = k_{t-1} + \theta + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_{rw}^2) \quad (15)$$

در مرحله دوم پیش بینی، مقادیر نرخ مرگومیر ویژه سنی پیش بینی می شوند. چنانچه از عبارت خطا صرف نظر شود، تغییرات در نرخ مرگومیر در یک سال خاص کاملاً به هم وابسته بوده و تابعی خطی از پارامتر متغیر زمانی k_t می باشد. بنابراین، برای محاسبه فاصله اطمینان نرخ مرگومیر در هر گروه سنی و در هر سال خاص، کافی است فاصله اطمینان k_t محاسبه شود. پیش بینی نرخ مرگومیر با توجه به مقادیر پارامترهای برآورد شده \hat{a}_x و \hat{b}_x و مقادیر پیش بینی شده \hat{k}_t از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$\hat{m}(x,t+s) = \hat{m}(x,t) \exp\left(\hat{b}_x (\hat{k}_{t+s} - \hat{k}_t)\right), \quad s=1,2,\dots,S \quad (16)$$

نرخ مرگومیر در ایران

از آنجاکه در تمامی کشورها سرشماری هر چند سال یک بار انجام می شود، استفاده از یک روش دقیق و کارآمد به منظور تهیه اطلاعات جمعیتی با استفاده از اطلاعات موجود در سال هایی که سرشماری انجام نمی شود، نخستین گام در جهت تهیه داده های نرخ خام مرگومیر و

1. Lee and Carter, 1992

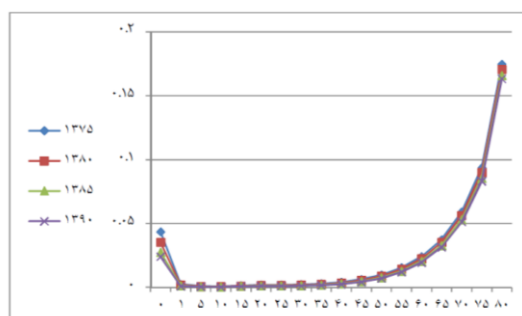
2. Box-Jenkins, 1976

3. Random Walk with Drift

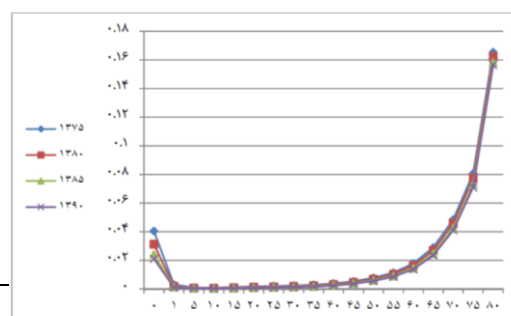
به عبارت دیگر، تهیه داده‌های یک جدول عمر است. تاکنون روش‌های بسیاری در این زمینه ارائه شده که از میان آنها، روش ویلموث^۱ از استقبال بیشتری برخوردار شده است. *نشریه علمی پژوهشنامه بیمه دوره ۲، شماره ۴، پاییز ۱۳۹۲، شماره پیاپی ۶، ص ۲۹۵-۳۱۰*

«پایگاه اطلاعاتی مرگ‌ومیر انسانی^۲» از می ۲۰۰۲ با استفاده از روش ویلموث به ارائه اطلاعات جامعی از داده‌های جمعیتی پرداخته است. نرخ خام مرگ‌ومیر در «پایگاه اطلاعاتی مرگ‌ومیر انسانی» برای زنان، مردان و کل جمعیت کشورها به دو شکل تک ساله و پنج ساله و برای سنین ۰ تا ۱۱۰ سال موجود است. لی و کارتر^۳ در مطالعه خود به برآورد و پیش‌بینی لگاریتم نرخ مرگ‌ومیر گروه‌های سنی پنج ساله پرداخته‌اند، ما نیز در این مطالعه به برآورد و پیش‌بینی لگاریتم نرخ مرگ‌ومیر گروه‌های سنی پنج ساله خواهیم پرداخت. ساختن جداول عمر کشور مستلزم وجود نرخ‌های مرگ ویژه سنی است که در آن تعداد فوت‌ها عموماً از ثبت مستمر و دائمی واقعه مرگ به‌دستی‌آید نه سرشماری. دقت نرخ واقعی مرگ کاملاً منوط به دسترسی به داده‌های ثبتی دقیق است و از آنجاکه ثبت فوت در ایران به دلایل متعدد، خطاهای فاحشی دارد و تلاش‌های صورت گرفته تاکنون موجب افزایش دقت مورد نیاز در محاسبه این نرخ نشده، عملاً ساختن یک جدول عمر مبتنی بر نرخ‌های واقعی مرگ در ایران میسر نشده است.

نظر به اشکالات غیرقابل اغماض موجود در شمار فوت‌های ثبتی، برای برآورد نرخ‌های مرگ‌ومیر کشور در این مقاله، از روش‌های غیرمستقیم مبتنی بر داده‌های سرشماری استفاده شده است. با توجه به دسترسی به اطلاعات شمار فرزندان زنده به‌دنیاآمده و درحال‌حاضر زنده، روش مناسب برای این برآورد، روش براس^۴ برای سال‌های ۱۳۷۵ و روش برآورد بین دو سرشماری ۱۳۸۵ و ۱۳۹۰ است. در این روش احتمال مرگ کودکان برای زنان واقع در سنین ۱۵ تا ۴۹ سال با استفاده از نسبت کودکان فوت‌شده (مکمل نسبت فرزندان زنده‌مانده) برآورد می‌شود و با توجه به سطح مرگ‌ومیر، نرخ‌های مرگ ویژه سن از جدول مدل غرب از خانواده جداول مرگ‌ومیر کول و دمنی^۵ برای سال‌های ۱۳۷۵، ۱۳۸۵ و ۱۳۹۰ استخراج می‌گردد و سپس با تغییرات خطی در فاصله این سال‌ها درون‌یابی می‌شود. خطای برآورد این نرخ‌ها به اندازه تفاوت نرخ مرگ‌ومیر ناشی از گروه سوانج، خصوصاً سوانج غیرعمد و ترفیکی است که سهم زیادی از فوت‌های این گروه را شامل می‌شود. عملاً نرخ‌های واقعی مرگ‌ومیر، متناسب با الگوی علل مرگ وقتی حاصل می‌شود که به اطلاعات دقیق ثبتی شمار و علل مرگ برحسب سن دسترسی باشد. نمودارهای ۱ و ۲، نرخ‌های مرگ‌ومیر ویژه سن مردان و زنان کل کشور را در سال‌های ۱۳۷۵-۱۳۹۰ نشان می‌دهد.



نمودار ۱: نرخ مرگ‌ومیر ویژه سنی کل مردان کشور در فاصله سال‌های ۱۳۷۵-۱۳۹۰



1. Wilmoth, 2002

2. Human Mortality Database (HMD)

3. Lee and Carter, 1992

4. Brass Method

5. Coale and Demeny

برآورد و پیش‌بینی نرخ مرگ‌ومیر در ایران با استفاده از مدل لی-کارتر ۱۳۴۰-۱۳۷۵
 نمودار ۲: نرخ مرگ‌ومیر ویژه سنی کل زنان کشور در فاصله سال‌های

همان‌گونه که از مقایسه نمودارهای ۱ و ۲ نتیجه می‌شود، الگوی سنی مرگ مردان و زنان کشور در سطح، متفاوت و همان‌طور که انتظار می‌رود عمدتاً در الگو مشابه هستند. در همه موارد بالاترین نرخ مرگ‌ومیر در سنین کودکی به اطفال زیر یک‌سال تعلق دارد. روند تغییرات به گونه‌ای است که نرخ مرگ‌ومیر اطفال زیر یک‌سال از بیش از ۴۰ در هزار (۰/۰۴ واحد) در سال ۱۳۷۵ برای مردان تا کمتر از ۲۰ در هزار در سال ۱۳۹۰ برای زنان کاهش یافته است. این نرخ از ۵ تا حدود ۳۰ سالگی در پایین‌ترین میزان در سطح نسبتاً ثابتی قرار دارد و خصوصاً از ۴۰ سالگی تدریجاً و از حدود ۶۰ سالگی به سرعت رو به افزایش می‌گذارد و با سرعت بیشتری از ۷۵ سالگی افزایش می‌یابد.

نتایج و بحث

برآورد نرخ مرگ‌ومیر ویژه سنی

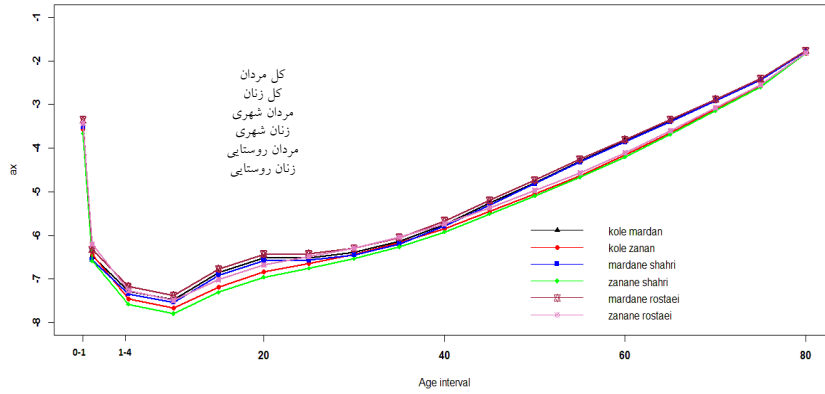
نخستین گام در برازش مدل لی-کارتر، برآورد پارامترهای a_x ، b_x و k_t است. روش لی-کارتر پایه براساس مدل‌بندی و پیش‌بینی نرخ خام کل جمعیت طراحی شده است. در توسیع روش لی-کارتر توسط لی و لی^۱، با اندک تعدیلاتی به برآورد و پیش‌بینی جداگانه نرخ مرگ‌ومیر زنان و مردان پرداخته شده است که با توجه به هدف این مقاله از این توسیع استفاده خواهد شد. مقادیر برازش‌شده پارامتر a_x در جدول ۱ آمده است.

جدول ۱: تخمین پارامتر a_x از روش لی-کارتر استاندارد

گروه سنی	کل مردان	کل زنان	مردان شهری	زنان شهری	مردان روستایی	زنان روستایی
۰	-۳/۴۴۹۹۸	-۳/۵۶۳۵۹	-۳/۵۰۵۴۵	-۳/۶۵۹۶۳	-۳/۳۵۲۲۸	-۳/۴۲۷۸۹
۱-۴	-۶/۴۷۵۲۳	-۶/۴۳۰۰۹	-۶/۵۶۱۲۳	-۶/۵۸۷۷۶	-۶/۳۲۵۴۸	-۶/۲۰۴۸۹
۵-۹	-۷/۲۸۱۴۹	-۷/۴۵۰۱۸	-۷/۳۴۴۶۱	-۷/۵۸۱۳۴	-۷/۱۷۱۱۸	-۷/۲۶۵۴۱
۱۰-۱۴	-۷/۴۷۷۰۷	-۷/۶۶۸۷	-۷/۵۳۵۳۸	-۷/۷۹۳۴۸	-۷/۳۷۶۱۹	-۷/۴۸۹۰۸
۱۵-۱۹	-۶/۸۵۷۲۶	-۷/۱۷۹۸۳	-۶/۹۰۸۱۳	-۷/۳۰۱۲۱	-۶/۷۶۸۳	-۷/۰۱۱۴۴
۲۰-۲۴	-۶/۵۲۳۹۱	-۶/۸۴۰۲	-۶/۵۷۵۷۱	-۶/۹۵۸۶	-۶/۴۳۲۵۹	-۶/۶۷۲۱۳
۲۵-۲۹	-۶/۵۱۷۸۸	-۶/۶۳۷۶۴	-۶/۵۷۲۸۴	-۶/۷۴۹۷۳	-۶/۴۲۱۹۴	-۶/۴۷۸۱۷
۳۰-۳۴	-۶/۳۹۵۵۷	-۶/۴۳۵۸۱	-۶/۴۵۰۹۵	-۶/۵۳۹۱۶	-۶/۲۹۹۷۹	-۶/۲۹۱
۳۵-۳۹	-۶/۱۳۹۸	-۶/۱۷۰۷۸	-۶/۱۹۲۴	-۶/۲۶۱۸۴	-۶/۰۴۸۷۴	-۶/۰۴۲۰۶
۴۰-۴۴	-۵/۷۴۶۲۸	-۵/۸۴۵۸۳	-۵/۷۹۲۴	-۵/۹۲۰۹۵	-۵/۶۶۷۱۵	-۵/۷۳۸۱۹
۴۵-۴۹	-۵/۲۶۵۹۳	-۵/۴۴۸۳۹	-۵/۳۰۲۷۸	-۵/۵۰۷۰۱	-۵/۲۰۲۷۶	-۵/۳۶۴۱۳
۵۰-۵۴	-۴/۷۸۸۹۳	-۵/۰۴۵۴	-۴/۸۱۹۱۵	-۵/۰۹۶۳۸	-۴/۷۳۷۲۷	-۴/۹۷۱۴۷
۵۵-۵۹	-۴/۲۹۸۷۴	-۴/۶۳۰۵۸	-۴/۳۲۲۰۶	-۴/۶۷۴۲۵	-۴/۲۵۸۷۲	-۴/۵۶۷۴۲
۶۰-۶۴	-۳/۸۳۹۱۴	-۴/۱۶۵۶۴	-۳/۸۵۹۰۶	-۴/۲۰۵۱	-۳/۸۰۴۹۵	-۴/۱۰۸۱۶
۶۵-۶۹	-۳/۳۷۶۸۲	-۳/۶۵۱۰۱	-۳/۳۹۳۰۲	-۳/۶۸۲۲۶	-۳/۳۴۸۹۴	-۳/۶۰۵۶
۷۰-۷۴	-۲/۹۰۳۸۶	-۳/۱۱۴۵	-۲/۹۱۷۱۹	-۳/۱۳۹۸۳	-۲/۸۸۰۹۸	-۳/۰۷۷۴۵
۷۵-۷۹	-۲/۴۳۱۱	-۲/۵۸۴۴۵	-۲/۴۴۲۳	-۲/۶۰۳۹۳	-۲/۴۱۱۸۹	-۲/۵۵۵۷۷
۸۰+	-۱/۷۸۰۷۵	-۱/۸۲۸۷۵	-۱/۷۸۶۹۹	-۱/۸۳۷۱۸	-۱/۷۷۰۰۵	-۱/۸۱۶۰۷

¹. Li and Lee, 2002

اکبر کمیجانی و همکاران

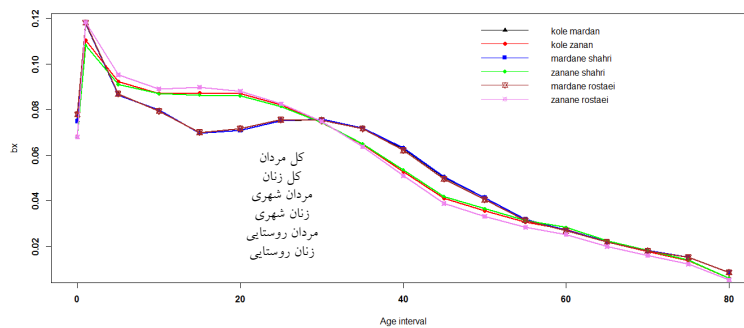


نمودار ۳: متوسط لگاریتم نرخ خام مرگ و میر ویژه سنی طی سال‌های ۹۰-۱۳۷۵

برآورد مقادیر پارامترهای b_x و k_t از تقریب درجه اول تجزیه ارزش منفرد ماتریس Z به دست می‌آید. برآورد این دو پارامتر نیز در جداول ۲ و ۳ آمده است.

جدول ۲: تخمین پارامتر b_x از روش لی-کارتر استاندارد

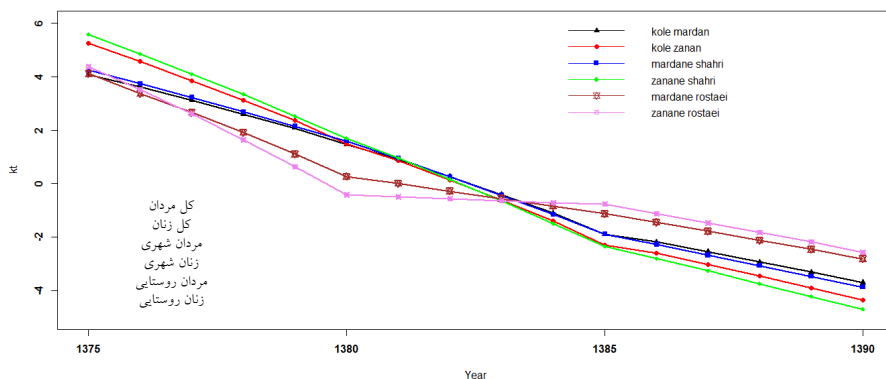
گروه سنی	کل مردان	کل زنان	مردان شهری	زنان شهری	مردان روستایی	زنان روستایی
۰	۰/۰۷۵۳۲۱	۰/۰۶۸۱۰۹	۰/۰۷۴۸۴۳	۰/۰۶۸۱	۰/۰۷۷۸۳۱	۰/۰۶۷۹۷۳
۱-۴	۰/۱۱۷۵۴	۰/۱۱۰۳۱۵	۰/۱۱۷۶۲۷	۰/۱۰۸۱۱۵	۰/۱۱۷۹۳۶	۰/۱۱۸۳۱۶
۵-۹	۰/۰۸۶۲۵۴	۰/۰۹۲۰۸۳	۰/۰۸۶۳۳۸	۰/۰۹۰۹۷۱	۰/۰۸۶۸۱	۰/۰۹۵۱۶۶
۱۰-۱۴	۰/۰۷۹۶۸	۰/۰۸۷۰۷۸	۰/۰۷۹۷۵۹	۰/۰۸۶۸۸	۰/۰۷۹۲۴۹	۰/۰۸۸۹۹۲
۱۵-۱۹	۰/۰۶۹۵۲	۰/۰۸۷۳۲۶	۰/۰۶۹۵۸۶	۰/۰۸۶۳۵۲	۰/۰۶۹۹۸	۰/۰۸۹۷۴۸
۲۰-۲۴	۰/۰۷۰۷۸۸	۰/۰۸۶۹۲۸	۰/۰۷۰۸۴۲	۰/۰۸۵۹۷۱	۰/۰۷۱۶۱۱	۰/۰۸۸۰۴۹
۲۵-۲۹	۰/۰۷۵۱۱	۰/۰۸۲۰۱۱	۰/۰۷۵۱۷۶	۰/۰۸۱۳۶۱	۰/۰۷۵۴۷۲	۰/۰۸۲۴۸۸
۳۰-۳۴	۰/۰۷۵۶۹۲	۰/۰۷۴۴۲۴	۰/۰۷۵۷۵۷	۰/۰۷۴۲۶۸	۰/۰۷۵۲۵۹	۰/۰۷۴۸۳۴
۳۵-۳۹	۰/۰۷۱۹۰۱	۰/۰۶۴۶۱۹	۰/۰۷۱۹۵۸	۰/۰۶۴۸۹۹	۰/۰۷۱۵۵۵	۰/۰۶۳۷۷۹
۴۰-۴۴	۰/۰۶۳۰۳۷	۰/۰۵۲۸۱۹	۰/۰۶۳۰۸۲	۰/۰۵۳۵۵۱	۰/۰۶۲۰۸۴	۰/۰۵۰۹۰۶
۴۵-۴۹	۰/۰۵۰۳۷۴	۰/۰۴۱۱۳۷	۰/۰۵۰۴۰۴	۰/۰۴۱۹۶۱	۰/۰۴۹۵۷۱	۰/۰۳۸۸۹
۵۰-۵۴	۰/۰۴۱۳۲۶	۰/۰۳۵۶۲۹	۰/۰۴۱۳۴۵	۰/۰۳۶۵۴۷	۰/۰۴۰۵۱	۰/۰۳۳۲۳۲
۵۵-۵۹	۰/۰۳۱۸۹۳	۰/۰۳۰۵۷۵	۰/۰۳۱۹۰۲	۰/۰۳۱۳۸۵	۰/۰۳۱۴۲۸	۰/۰۲۸۳۶۷
۶۰-۶۴	۰/۰۲۷۲۵۱	۰/۰۲۷۵۳۱	۰/۰۲۷۲۵۱	۰/۰۲۸۳۶۹	۰/۰۲۶۸۷۵	۰/۰۲۵۲۹۵
۶۵-۶۹	۰/۰۲۲۱۷۵	۰/۰۲۱۹۰۲	۰/۰۲۲۱۶۷	۰/۰۲۲۵۸۶	۰/۰۲۱۹۳۳	۰/۰۲۰۰۲۸
۷۰-۷۴	۰/۰۱۸۲۱۵	۰/۰۱۷۷۹۴	۰/۰۱۸۱۶۹	۰/۰۱۸۳۶۶	۰/۰۱۸۰۶۵	۰/۰۱۶۱۵۴
۷۵-۷۹	۰/۰۱۵۳۲۷	۰/۰۱۳۷۰۶	۰/۰۱۵۲۷۸	۰/۰۱۴۱۵۸	۰/۰۱۵۲۰۱	۰/۰۱۲۳۵۲
۸۰+	۰/۰۰۸۶۰۷	۰/۰۰۶۰۱۴	۰/۰۰۸۵۱۵	۰/۰۰۶۱۶	۰/۰۰۸۶۲۹	۰/۰۰۵۴۳۳



نشریه علمی پژوهشنامه بیمه دور ۲، شماره ۴، پاییز ۱۳۹۲، شماره پیاپی ۶، صص ۲۹۵-۳۱۱
 نمودار ۴: میزان انحراف از متوسط لگاریتم نرخ خام مرگ با تغییر دز شاخص سطح عمومی مرگومیر طی سال های ۱۳۷۵-۱۳۹۰

جدول ۳: تخمین پارامتر Kt از روش لی-کارتر استاندارد

سال	کل مردان	کل زنان	مردان شهری	زنان شهری	مردان روستایی	زنان روستایی
۱۳۷۵	۴/۰۵۵۳۷۳	۵/۲۳۸۲۷۵	۴/۲۳۷۳۴۹	۵/۵۸۰۶۲۴	۴/۱۰۷۳۰۵	۴/۳۶۸۳۴۳
۱۳۷۶	۳/۶۰۳۹۳۷	۴/۵۶۱۷۴	۳/۷۳۷۲۱۱	۴/۸۵۲۶۸۷	۳/۳۶۵۰۱۱	۳/۵۱۰۲۲۷
۱۳۷۷	۳/۱۰۶۲۷۸	۳/۸۵۳۲۴۲	۳/۲۲۴۳۳۶	۴/۰۸۵۹۹۵	۲/۶۵۹۵۷۷	۲/۶۰۲۷۴۴
۱۳۷۸	۲/۵۹۵۹۶	۳/۱۰۸۵۴۵	۲/۶۸۳۷۴۷	۳/۳۴۰۹۳۵	۱/۹۰۷۹۴۲	۱/۶۳۷۱۳۹
۱۳۷۹	۲/۰۷۳۱۶۲	۲/۳۶۸۵۲۶	۲/۱۴۴۶۷۵	۲/۵۲۲۹۸۹	۱/۱۰۳۳	۰/۶۲۳۸۲۷
۱۳۸۰	۱/۴۵۹۵۰۸	۱/۴۹۵۶۱۷	۱/۵۹۱۶۷۷	۱/۶۹۳۴۶۳	۰/۲۶۷۰۰۷	-۰/۴۱۸۸۴
۱۳۸۱	۰/۹۰۷۷۲۹	۰/۸۶۰۶۳۱	۰/۹۴۱۷۹۱	۰/۹۴۹۴۵۴	۰/۰۱۷۴۱	-۰/۴۹۱۲۶
۱۳۸۲	-۰/۲۵۹۳۰۶	-۰/۱۳۸۸۵	-۰/۲۵۴۸۲۲	-۰/۱۵۸۷۴۹	-۰/۲۸۲۷۵	-۰/۵۶۳۴۴
۱۳۸۳	-۰/۴۰۹۱۱	-۰/۶۱۰۸۵	-۰/۴۳۶۸۴	-۰/۶۴۱۳	-۰/۵۵۴۹۴	-۰/۶۳۵۵۳
۱۳۸۴	-۱/۰۹۸۶	-۱/۳۸۷۴۴	-۱/۱۵۱۶۶	-۱/۴۹۲۶۳	-۰/۸۳۰۶۱	-۰/۷۰۷۹۵
۱۳۸۵	-۱/۹۰۱۷۳	-۲/۲۹۵۳۷	-۱/۸۹۰۱۹	-۲/۳۵۵۷۳	-۱/۱۲۶۳۷	-۰/۷۶۲۴۶
۱۳۸۶	-۲/۱۷۵۸۹	-۲/۶۰۶۵۱	-۲/۲۶۸۱۳	-۲/۷۹۹۵۳	-۱/۴۴۳	-۱/۱۲۶۶۹
۱۳۸۷	-۲/۵۴۶۷	-۳/۰۲۸۲۶	-۲/۶۷۲۲۴۲	-۳/۲۵۳۱۲	-۱/۷۸۱۳۴	-۱/۴۶۶۵۳
۱۳۸۸	-۲/۹۲۳۸۴	-۳/۴۵۷۹۵	-۳/۰۶۴۳	-۳/۳۸۷۴	-۲/۱۲۴۹۹	-۱/۸۲۹۳۸
۱۳۸۹	-۳/۳۰۷۴۱	-۳/۸۹۶۳۲	-۳/۴۶۳۰۴	-۴/۲۱۰۹۳	-۲/۴۵۶۵	-۲/۱۸۱۶۴
۱۳۹۰	-۳/۶۹۷۶۱	-۴/۳۴۲۴۸	-۳/۸۶۸۸۵	-۴/۶۹۲۸۹	-۲/۸۱۱۵۶	-۲/۵۵۸۷۶



نمودار ۵: شاخص سطح عمومی مرگومیر طی سال های ۱۳۷۵-۱۳۹۰

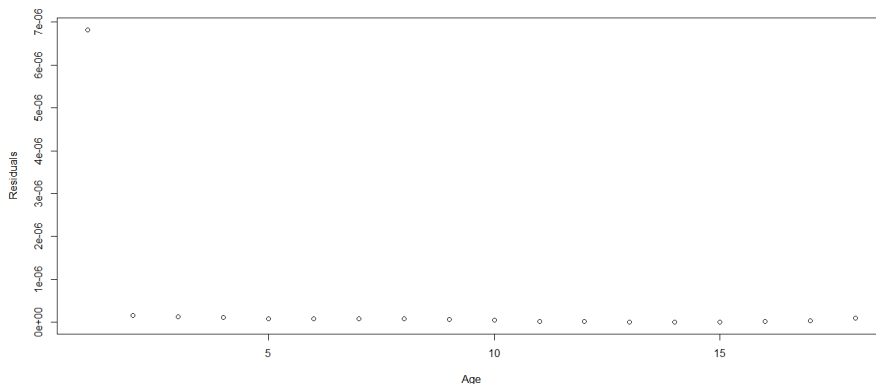
با توجه به مقادیر برآورد پارامتر a_x ، متوسط لگاریتم نرخ خام مرگومیر در گروه سنی کودکان و سالمندان بیشتر از دیگر گروه های سنی است؛ بنابراین، این دو گروه سنی بیشترین تأثیر را در سطح کلی مرگومیر دارند. ازسوی دیگر، افزایش سطح مرگومیر حدوداً از ۲۰ سالگی آغاز می شود، چنین الگویی در بیشتر کشورهای توسعه یافته نیز برقرار است؛ بسیاری از جمعیت شناسان، الگوی زندگی جوانان را دلیل این پیشامد می دانند (آل حسینی، ۱۳۹۱).

الگوی پارامتر b_x که بیانگر میزان حساسیت نسبی هر گروه سنی به تغییر در سطح عمومی مرگومیر می باشد، نشان می دهد که کودکان و سالمندان به ترتیب در معرض بیشترین و کمترین تأثیر پذیری هستند.

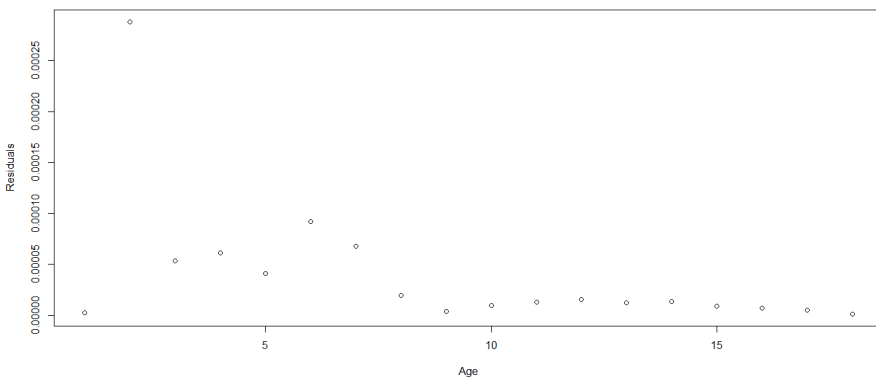
اگر k_t به طور خطی در طول زمان کاهش یابد، ثابت $\frac{d}{dt} k_t$ بوده و در این صورت، نرخ خام مرگومیر هر گروه سنی با نرخ نمایی و متناسب با پارامتر b_x آن گروه سنی تغییر می‌کند. مقادیر تخمینی این پارامتر حاکی از یک روند تقریباً خطی کاهشی با سرعت تقریباً ثابت در طول دوره برازش است.

برآورد و پیش‌بینی نرخ مرگومیر در ایران با استفاده از مدل لی-کارتر

از آنجاکه به‌خاطر ماهیت داده‌های نرخ مرگومیر ویژه سنی در عمل فرض نرمال بودن باقی‌مانده‌ها برقرار نیست، برای ارزیابی برازش مدل، پراکندگی واریانس مؤلفه‌های خطای هر گروه سنی خاص در طول زمان را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. ملاحظه می‌شود که پراکندگی مؤلفه‌های خطای هر گروه سنی خاص در کل مردان کشور با یکدیگر تفاوت قابل توجهی ندارند و تنها مورد استثنای این شکل مربوط به گروه سنی صفر سالگی است که با توجه به پراکندگی بالای نرخ مرگومیر در این گروه سنی و مقدار واریانس این گروه، قابل چشم‌پوشی است. در مقابل، پراکندگی مؤلفه‌های خطا برای کل زنان کشور در گروه سنی ۱-۴ سال تفاوت قابل توجهی با سایر گروه‌ها دارد.



نمودار ۶: پراکندگی واریانس مؤلفه‌های خطای گروه‌های سنی کل مردان کشور در طول زمان



نمودار ۷: پراکندگی واریانس مؤلفه‌های خطای گروه‌های سنی کل زنان کشور در طول زمان

پیش‌بینی نرخ مرگومیر ویژه سنی

از آنجاکه k_t تنها پارامتر زمانی متغیر مدل لی-کارتر است و در این مدل پارامتر b_x در طول زمان ثابت در نظر گرفته می‌شود، در این قسمت به پیش‌بینی پارامتر k_t و در نتیجه لگاریتم نرخ خام مرگومیر ویژه سنی خواهیم پرداخت.

تخمین پارامتر متغیر زمانی k_t را می‌توان به‌عنوان یک فرایند تصادفی مدل‌سازی کرد. برای این منظور از روش استاندارد باکس-جنکینز (شناسایی-تخمین-تشخیص^۱) جهت ایجاد یک مدل مناسب ARIMA (p,d,q) برای شاخص مرگومیر k_t استفاده خواهیم کرد. لازم است با

1. Identification-Estimation-Diagnosis

توجه به سری تخمین زده شده k_t ، یک مدل مناسب را از میان مدل‌های عمومی ARIMA شناسایی نمود. فرایند ساخت مدل مناسب برای برآزش داده‌ها طی چند مرحله انجام می‌گیرد:

- تحلیل اولیه سری داده‌ها؛
- شناسایی رتبه مدل؛
- تخمین پارامترها؛
- ارزیابی مدل.

اکبر کمیجانی و همکاران

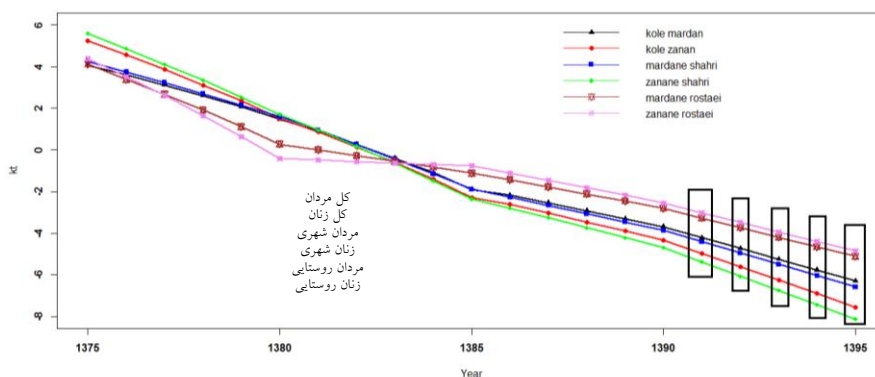
الگوی عمومی سری k_t برای کل زنان و مردان کشور و زنان و مردان شهری و روستایی نشانگر روند کاهشی آن است؛ به عبارت دیگر، سری k_t در میانگین مانا نیست. توجه به توابع خودهمبستگی و خودهمبستگی جزئی سری k_t نیز مؤید همین مطلب است. بنابراین، براساس روش باکس-جنکینز باید سری‌های تفاضلی را در نظر گرفت. پس از تفاضل‌گیری از سری‌ها، نامانایی در میانگین حذف شده و توابع خودهمبستگی و خودهمبستگی جزئی با فرضیه سری‌های مانا سازگار می‌شوند. با توجه به روند کاهشی k_t ، یک جمله ثابت نیز در جریان تخمین مدل لحاظ می‌گردد. با طی کردن فرایند فوق برای سری‌های تخمینی k_t به مدل ARIMA(0,1,0) و به عبارت دیگر، مدل گام تصادفی با رانش خواهیم رسید:

$$k_t = k_{t-1} + \theta + \varepsilon_t \quad (15)$$

جمله ثابت θ بیانگر میانگین تغییر سالانه k_t است. براساس میزان θ می‌توان تغییرات بلندمدت مرگ‌ومیر را پیش‌بینی کرد. پس از تخمین پارامتر θ ، از مدل گام تصادفی با رانش برای پیش‌بینی شاخص مرگ‌ومیر k_t برای ۵ سال آینده براساس اطلاعات دوره ۱۳۷۵-۱۳۹۰ استفاده می‌کنیم. در جدول ۴ مقادیر پیش‌بینی شده k_t آمده است:

جدول ۴: پیش‌بینی شاخص مرگ‌ومیر k_t

سال	کل مردان	کل زنان	مردان شهری	زنان شهری	مردان روستایی	زنان روستایی
۱۳۹۱	-۴/۲۱۴۶۱	-۴/۹۸۱۴۸	-۴/۴۰۸۸۵	-۵/۳۷۷۸۹	-۳/۲۷۱۵۶	-۳/۰۱۸۷۶
۱۳۹۲	-۴/۷۳۱۶۱	-۵/۶۲۰۴۸	-۴/۹۴۸۸۵	-۶/۰۶۲۸۹	-۳/۷۳۱۵۶	-۳/۴۷۸۷۶
۱۳۹۳	-۵/۲۴۸۶۱	-۶/۲۵۹۴۸	-۵/۴۸۸۸۵	-۶/۷۴۷۸۹	-۴/۱۹۱۵۶	-۳/۹۳۸۷۶
۱۳۹۴	-۵/۷۶۵۶۱	-۶/۸۹۸۴۸	-۶/۰۲۸۸۵	-۷/۴۳۲۸۹	-۴/۶۵۱۵۶	-۴/۳۹۸۷۶
۱۳۹۵	-۶/۲۸۲۶۱	-۷/۵۳۷۴۸	-۶/۵۶۸۸۵	-۸/۱۱۷۸۹	-۵/۱۱۱۵۶	-۴/۸۵۸۷۶



نمودار ۸: پیش‌بینی شاخص سطح عمومی مرگ‌ومیر طی سال‌های ۱۳۹۵-۱۳۹۰

پس از پیش‌بینی شاخص سطح مرگ‌ومیر یا k_t ، می‌توان مقادیر جدول عمر در گروه‌های سنی ۵ ساله و برای سال‌های ۱۳۹۵-۱۳۹۱ را محاسبه کرد. برای این کار ابتدا باید نرخ مرگ‌ومیر ویژه سنی را براساس فرمول زیر پیش‌بینی کرد:

$$\hat{m}(x, 1390+s) = \hat{m}(x, 1390) \exp(\hat{b}_x(\hat{k}_{1390+s} - \hat{k}_{1390})), \quad s=1, 2, \dots, 5 \quad (16)$$

مقادیر نرخ مرگومیر پیش‌بینی‌شده برای کل مردان و زنان کشور در ادامه آمده است:

نشریه علمی پژوهشنامه بیمه دوره ۲، شماره ۴، پاییز ۱۳۹۲، شماره پیاپی ۶، ص ۲۹۵-۳۱۰

جدول ۵: پیش‌بینی نرخ مرگومیر ویژه سنی کل مردان کشور

گروه سنی	۱۳۹۱	۱۳۹۲	۱۳۹۳	۱۳۹۴	۱۳۹۵
۰	۰/۰۲۳۱۱۱	۰/۰۲۲۲۲۹	۰/۰۲۱۳۸	۰/۰۲۰۵۶۳	۰/۰۱۹۷۷۸
۱-۴	۰/۰۰۰۹۳۹	۰/۰۰۰۸۸۴	۰/۰۰۰۸۳۲	۰/۰۰۰۷۸۳	۰/۰۰۰۷۳۷
۵-۹	۰/۰۰۰۴۷۸	۰/۰۰۰۴۵۷	۰/۰۰۰۴۳۷	۰/۰۰۰۴۱۸	۰/۰۰۰۴
۱۰-۱۴	۰/۰۰۰۴۰۴	۰/۰۰۰۳۸۸	۰/۰۰۰۳۷۲	۰/۰۰۰۳۵۷	۰/۰۰۰۳۴۳
۱۵-۱۹	۰/۰۰۰۷۸۵	۰/۰۰۰۷۵۷	۰/۰۰۰۷۳	۰/۰۰۰۷۰۴	۰/۰۰۰۶۷۹
۲۰-۲۴	۰/۰۰۱۰۸۹	۰/۰۰۱۰۵	۰/۰۰۱۰۱۳	۰/۰۰۰۹۷۶	۰/۰۰۰۹۴۱
۲۵-۲۹	۰/۰۰۱۰۷۶	۰/۰۰۱۰۳۵	۰/۰۰۰۹۹۶	۰/۰۰۰۹۵۸	۰/۰۰۰۹۲۲
۳۰-۳۴	۰/۰۰۱۲۱۳	۰/۰۰۱۱۶۷	۰/۰۰۱۱۲۲	۰/۰۰۱۰۷۹	۰/۰۰۱۰۳۸
۳۵-۳۹	۰/۰۰۱۵۹۲	۰/۰۰۱۵۳۴	۰/۰۰۱۴۷۸	۰/۰۰۱۴۲۴	۰/۰۰۱۳۷۲
۴۰-۴۴	۰/۰۰۲۴۴۹	۰/۰۰۲۳۷	۰/۰۰۲۲۹۴	۰/۰۰۲۲۲۱	۰/۰۰۲۱۵
۴۵-۴۹	۰/۰۰۴۱۷۷	۰/۰۰۴۰۷	۰/۰۰۳۹۶۵	۰/۰۰۳۸۶۳	۰/۰۰۳۷۶۴
۵۰-۵۴	۰/۰۰۶۹۹۱	۰/۰۰۶۸۴۳	۰/۰۰۶۶۹۹	۰/۰۰۶۵۵۷	۰/۰۰۶۴۱۸
۵۵-۵۹	۰/۰۱۱۸۷۷	۰/۰۱۱۶۸۲	۰/۰۱۱۴۹۱	۰/۰۱۱۳۰۳	۰/۰۱۱۱۱۹
۶۰-۶۴	۰/۰۱۹۱۷۸	۰/۰۱۸۹۱	۰/۰۱۸۶۴۵	۰/۰۱۸۳۸۴	۰/۰۱۸۱۲۷
۶۵-۶۹	۰/۰۳۱۱۰۸	۰/۰۳۰۷۵۴	۰/۰۳۰۴۰۳	۰/۰۳۰۰۵۷	۰/۰۲۹۷۱۴
۷۰-۷۴	۰/۰۵۰۷۶۱	۰/۰۵۰۲۸۵	۰/۰۴۹۸۱۴	۰/۰۴۹۳۴۷	۰/۰۴۸۸۸۴
۷۵-۷۹	۰/۰۸۲۴۳۹	۰/۰۸۱۷۸۷	۰/۰۸۱۱۴۳	۰/۰۸۰۵۰۳	۰/۰۷۹۸۶۷
۸۰+	۰/۱۶۲۵۰۸	۰/۱۶۱۷۸۷	۰/۱۶۱۰۶۸	۰/۱۶۰۳۵۳	۰/۱۵۹۶۴۱

جدول ۶: پیش‌بینی نرخ مرگومیر ویژه سنی کل زنان کشور

گروه سنی	۱۳۹۱	۱۳۹۲	۱۳۹۳	۱۳۹۴	۱۳۹۵
۰	۰/۰۲۰۱۸۴	۰/۰۱۹۳۲۵	۰/۰۱۸۵۰۲	۰/۰۱۷۷۱۴	۰/۰۱۶۹۵۹
۱-۴	۰/۰۰۰۹۳۱	۰/۰۰۰۸۶۸	۰/۰۰۰۸۰۹	۰/۰۰۰۷۵۴	۰/۰۰۰۷۰۲
۵-۹	۰/۰۰۰۳۶۷	۰/۰۰۰۳۴۷	۰/۰۰۰۳۲۷	۰/۰۰۰۳۰۸	۰/۰۰۰۲۹۱
۱۰-۱۴	۰/۰۰۰۳۰۳	۰/۰۰۰۲۸۶	۰/۰۰۰۲۷۱	۰/۰۰۰۲۵۶	۰/۰۰۰۲۴۲
۱۵-۱۹	۰/۰۰۰۴۹۳	۰/۰۰۰۴۶۶	۰/۰۰۰۴۴۱	۰/۰۰۰۴۱۷	۰/۰۰۰۳۹۴
۲۰-۲۴	۰/۰۰۰۶۹۴	۰/۰۰۰۶۵۷	۰/۰۰۰۶۲۱	۰/۰۰۰۵۸۸	۰/۰۰۰۵۵۶
۲۵-۲۹	۰/۰۰۰۸۷۱	۰/۰۰۰۸۲۷	۰/۰۰۰۷۸۴	۰/۰۰۰۷۴۴	۰/۰۰۰۷۰۶
۳۰-۳۴	۰/۰۰۱۱۰۷	۰/۰۰۱۰۵۵	۰/۰۰۱۰۰۶	۰/۰۰۰۹۵۹	۰/۰۰۰۹۱۵
۳۵-۳۹	۰/۰۰۱۵۱۴	۰/۰۰۱۴۵۳	۰/۰۰۱۳۹۴	۰/۰۰۱۳۳۸	۰/۰۰۱۲۸۴
۴۰-۴۴	۰/۰۰۲۲۲۳	۰/۰۰۲۱۴۹	۰/۰۰۲۰۷۸	۰/۰۰۲۰۰۹	۰/۰۰۱۹۴۲
۴۵-۴۹	۰/۰۰۳۵۰۶	۰/۰۰۳۴۱۵	۰/۰۰۳۳۲۶	۰/۰۰۳۲۴	۰/۰۰۳۱۵۶
۵۰-۵۴	۰/۰۰۵۳۹۲	۰/۰۰۵۲۷	۰/۰۰۵۱۵۲	۰/۰۰۵۰۳۶	۰/۰۰۴۹۲۳
۵۵-۵۹	۰/۰۰۸۳۷۲	۰/۰۰۸۲۱	۰/۰۰۸۰۵۱	۰/۰۰۷۸۹۵	۰/۰۰۷۷۴۲
۶۰-۶۴	۰/۰۱۳۵۳۱	۰/۰۱۳۲۹۵	۰/۰۱۳۰۶۳	۰/۰۱۲۸۳۵	۰/۰۱۲۶۱۱
۶۵-۶۹	۰/۰۲۳۲۸۱	۰/۰۲۲۹۵۷	۰/۰۲۲۶۳۸	۰/۰۲۲۳۲۴	۰/۰۲۲۰۱۳
۷۰-۷۴	۰/۰۴۰۶۳۴	۰/۰۴۰۱۷۵	۰/۰۳۹۷۲۱	۰/۰۳۹۲۷۲	۰/۰۳۸۸۲۸

گروه سنی	۱۳۹۱	۱۳۹۲	۱۳۹۳	۱۳۹۴	۱۳۹۵
۷۵-۷۹	۰/۰۷۰۴۵۹	۰/۰۶۹۸۴۵	۰/۰۶۹۲۳۶	۰/۰۶۸۶۳۲	۰/۰۶۸۰۳۴
۸۰+	۰/۰۱۵۵۸۷۴	۰/۰۱۵۵۲۷۶	۰/۰۱۵۴۶۸	۰/۰۱۵۴۰۸۷	۰/۰۱۵۳۴۹۶

برآورد و پیش‌بینی نرخ مرگ‌ومیر در ایران با استفاده از مدل لی-کارتر

براساس پیش‌بینی نرخ مرگ‌ومیر، مقادیر امید به زندگی در بدو تولد قابل پیش‌بینی خواهد بود. پیش‌بینی امید به زندگی در بدو تولد در فاصله سال‌های ۱۳۹۵-۱۳۹۰ برای جامعه کل مردان و زنان کشور و مردان و زنان شهری و روستایی در جدول ۷ آمده است:

جدول ۷: پیش‌بینی امید به زندگی در بدو تولد در فاصله سال‌های ۱۳۹۵-۱۳۹۰ برای گروه‌های جنسی کشور

سال-گروه	کل مردان	کل زنان	مردان شهری	زنان شهری	مردان روستایی	زنان روستایی
۱۳۹۱	۷۰/۶۱۸	۷۲/۹۳۱	۷۱/۵۶۸	۷۳/۶۴۸	۶۹/۵۱	۷۱/۱۳۸
۱۳۹۲	۷۰/۸۶۳	۷۳/۱۸۴	۷۱/۸۷۷	۷۳/۹	۶۹/۷۵۲	۷۱/۳۵۵
۱۳۹۳	۷۱/۱۰۲	۷۳/۴۲۹	۷۲/۱۰۷	۷۴/۱۴۵	۶۹/۹۸۹	۷۱/۵۶۶
۱۳۹۴	۷۱/۳۳۶	۷۳/۶۶۸	۷۲/۳۳۱	۷۴/۳۸۲	۷۰/۲۲۱	۷۱/۷۷۳
۱۳۹۵	۷۱/۵۶۴	۷۳/۸۹۹	۷۲/۵۵	۷۴/۶۱۲	۷۰/۷۷۴	۷۱/۹۷۵

مقادیر پیش‌بینی شده برای امید به زندگی در بدو تولد با استفاده از مدل لی-کارتر به خوبی برتری این روش بر سایر روش‌های پیش‌بینی را نشان می‌دهد. در اکثر این روش‌ها امید به زندگی در بدو تولد (e0) به‌طور مستقیم پیش‌بینی شده و سپس با اعمال قیدهایی (همچون تعریف یک حد بالا برای طول عمر انسان) یا در بهترین حالت با استفاده از توابع نمایی یا لجستیک، سعی در کاهش روند صعودی رشد این متغیر می‌شود. در حالی که این کاهش نرخ رشد، ناشی از ماهیت طبیعی امید به زندگی در بدو تولد به‌عنوان یک تابع غیر خطی از نرخ مرگ‌ومیر است. کی‌فیتز^۱ نشان داد که اگر نرخ مرگ‌ومیر در هر سن با نسبت مشخصی کاهش یابد، امید به زندگی در بدو تولد با نسبت کوچک‌تری از آن افزایش می‌یابد. در مدل لی-کارتر برای نخستین بار، با مدل‌سازی نرخ مرگ‌ومیر، بدون هیچ قیدی کاهش در رشد e0 به‌طور طبیعی حاصل می‌شود.

نتایج و بحث

پیش‌بینی مرگ‌ومیر یا شاخص سطح آن یعنی امید به زندگی جزء لاینفک پیش‌بینی‌های جمعیتی است که به دلیل نقش تعیین‌کننده‌ای که در محاسبات بیمه‌ای برعهده دارد، مورد توجه محققین و متخصصین بیمه نیز بوده است. معمول‌ترین روش برای پیش‌بینی مرگ‌ومیر، پیش‌بینی امید به زندگی است. برای انجام این کار تغییرات امید به زندگی را در تابعی غیرخطی (اشباع‌شونده یا لجستیک یا نمایی) در نظر گرفته و با مفروض داشتن حداکثر طول عمر، این شاخص را در بلندمدت پیش‌بینی می‌کنند. این روش لااقل قادر به حل دو مسئله پیش رو نیست: اول اینکه حداکثر طول عمر انسان اندازه دقیقاً مشخصی نیست. به همین دلیل در چنین پیش‌بینی‌هایی بالاترین مقدار تجربه‌شده (معمولاً امید به زندگی کشورهای توسعه‌یافته‌ای چون ژاپن) را معیار قرار می‌دهند. مسلماً نمی‌توان این مقدار را ثابت فرض کرد و چون این مقدار بر همه برآوردها اثر دارد، خطای پیش‌بینی امید به زندگی در سال‌های مورد نظر غیرقابل اغماض و غیرتصادفی است. دوم اینکه به دلیل غیرخطی بودن رابطه بین امید به زندگی و نرخ‌های مرگ ویژه سن، در همه این پیش‌بینی‌ها تبدیل امید به زندگی پیش‌بینی شده به نرخ‌های مرگ ویژه سن، مشکل دیگری است. راه حل این مشکل نیز معمولاً در استفاده از مدل‌های استاندارد (مثل جداول کول و دمنی یا جداول سازمان ملل متحد) جستجو می‌شود که ممکن است به علت تفاوت الگوی سنی مرگ در جمعیت مورد نظر و جداول مدل، خطای دیگری به خطای پیش‌بینی‌های مرگ‌ومیر وارد کند.

مدل لی-کارتر روش بدیلی است که مستقیماً قادر به پیش‌بینی مرگ‌ومیر برحسب سن بوده و ارقام پیش‌بینی شده به سهولت با ساختن یک جدول عمر واقعی، قابل تبدیل به هر یک از شاخص‌های مرگ‌ومیر از جمله امید به زندگی است. این روش به چند دلیل بر روش‌های دیگر

1. Keyfitz, 1985

پیش‌بینی مستقیم نرخ مرگ‌ومیر یا پیش‌بینی امید به زندگی برتری دارد. اول اینکه اگر هر نرخ به بهترین شکل توسط یک مدل ARIMA^۱ مدل‌سازی شود، نیازمند برآورد تعداد زیادی پارامتر است. دوم، با پیش‌بینی مستقل هر نرخ، نیاز به محاسبه تعداد $\frac{N(N-1)}{2}$ کوواریانس عبارات خطا خواهد بود (N تعداد گروه‌های سنی است)؛ درحالی‌که در روش **کمپانی** و همکاران^۲ کارتر از آنجا که نرخ مرگ‌ومیر در گروه‌های سنی مختلف در هر سال تابعی از پارامتر k_t است، هم‌بستگی شدیدی بین این نرخ و شاخص k_t وجود داشته و واریانس و کوواریانس عبارات خطا از طریق مدل انتخابی برای k_t به دست می‌آید. سوم، پیش‌بینی مستقل هر نرخ امکان ترکیب نرخ‌ها و تشکیل ساختارهای سنی غیر محتمل در آینده را محتمل می‌سازد؛ درحالی‌که در مدل لی-کارتر از آنجا که روند موجود در تمام نرخ‌های مرگ‌ومیر ویژه سنی توسط پارامتر k_t مدل‌سازی می‌شود، تمامی نرخ‌های برآورد شده متعلق به یک جدول عمر خواهد بود (Lee and Carter, 1992).

با وجود همه امتیازاتی که می‌توان برای مدل لی-کارتر برشمرد و با اینکه ارزیابی نتایج به دست آمده در کاربردهای فراوان این مدل نشان از کارآمدی بالای مدل دارد، اما نباید از خاطر دور داشت که مفروضات مربوط به الگوی سنی ثابت در این مدل در برخی موارد برآورده نمی‌شود. همچنانکه لی و میلر^۲ اشاره کرده‌اند، با وجود اینکه پیش‌بینی‌های مدل برای فرانسه، کانادا و ژاپن خوب ارزیابی می‌شود، اما این روش همواره در برابر الگوی سنی در حال تغییر با مسائل و خطاهایی مواجه است. از این‌رو تعدادی از جمعیت‌شناسان، تغییر و تعدیل‌هایی برای بهبود نتایج پیش‌بینی در مدل لی-کارتر اعمال کرده‌اند. بوث و همکاران^۳ معتقدند که روش تعدیل‌شده‌ای که در پیش‌بینی مرگ‌ومیر در استرالیا به کار برده‌اند، ۵۰٪ از خطای روش اصلی کاسته است. بونگارت^۴ نیز با برآزش مدل لجستیک نیروی مرگ‌ومیر نشان داد که پارامتر شیب در طول زمان تقریباً ثابت است و برای پیش‌بینی، مدل بدیلی را پیشنهاد کرده است.

یافته‌های این مقاله نشان می‌دهد که توان و کارآمدی مدل لی-کارتر در پیش‌بینی مرگ‌ومیر ایران بالاست، با این حال در این مقاله مجالی برای آزمون یکی از مفروضات پایه مدل لی-کارتر وجود نداشت و آن اینکه آیا الگوی سنی مرگ در ایران ثابت است؟ به عبارت دیگر آیا نرخ مرگ‌ومیر ویژه سنی در طول زمان تغییر نکرده است؟ پیش‌بینی مرگ‌ومیر در چنین شرایطی نیز امکان‌پذیر است و غیر از مدل لی-کارتر چند مدل و رویکرد جدید نیز از طرف جمعیت‌شناسان عرضه شده که می‌توان برای جمعیت‌هایی با الگوی سنی متغیر به کار برد. البته ذکر این نکته ضروری است که انجام چنین آزمونی مستلزم دسترسی به نرخ‌های مرگ‌ومیری است که از نظر دقت ثبت قابل اعتماد باشد. کاری که امید می‌رود در تحقیقات بعدی دنبال شود.

منابع و ماخذ

آل حسینی، ف. س.، (۱۳۹۱). مقایسه روش تحلیل مجموعه مقادیر تکین در پیش‌بینی نرخ مرگ‌ومیر با روش‌هایی از خانواده لی-کاتر. پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه شهید بهشتی.

زنجانی، ح. الف. نوراللهی، ط.، (۱۳۷۹). جداول مرگ‌ومیر در ایران برای سال ۱۳۷۵. تهران: مؤسسه عالی پژوهش تأمین اجتماعی.

زنجانی، ح. الف.، نوراللهی، ط.، سحرخیز، ع. ر.، (۱۳۸۸). پیش‌بینی جمعیت ایران تا سال ۱۴۰۵ به تفکیک استانی و شهری و روستایی. تهران: پژوهشکده آمار.

Baker, K., (2005). Singular value decomposition tutorial, Rough Draft-Beware Suggestions.

Bongaarts, J., (2005). Long-range trends in adult mortality models and projection methods. *Demography*, 42(1), pp. 23-49.

Booth, H.; Maindonald, J.; Smith, L., (2002). Lee-Carter under conditions of variable mortality decline, *Population Studies*, 56(3), pp. 325-36.

Box, G.E.; Jenkins, G.M., (1976). *Time series analysis: Forecasting and control*. San Francisco: Holden-Day.

1. Auto Regressive Integrated Moving Average (ARIMA)

2. Lee and Miller, 2001

3. Booth et al., 2002

4. Bongaarts, 2005

- Deaton, A.; Pakson, C.P., (2004). Mortality, income, and income inequality over time in the Britain and the United States. Technical Report 8534 National Bureau of Economic Research Cambridge, MA.
- Girosi, F.; King, G., (2007). Understanding the Lee-Carter mortality forecasting method, Technical Report, Rand Corporation.
- Keyfitz, N., (1985). Applied mathematical demography, New York: Springer-Verlag, 2nd ed.
- Lee, R.D., (2000). The Lee-Carter method for forecasting mortality, with various extensions and applications. North American Actuarial Journal, 1(4), pp. 80-91.
- Lee, R.D.; Carter, L.R., (1992). Modeling and forecasting US mortality. Journal of the American Statistical Association, 419(87), pp.659-75.
- Lee R.; Miller, T., (2001). Evaluating the performance of the Lee-Carter method for forecasting mortality. Demography, 38(4), pp. 537-49.
- Li, N.; Lee, R., (2002). Using the Lee-Carter method to forecast mortality for populations with limited data. Research for this paper was funded by a grant from NIA, R37-AG11761.
- Tableau, E., (2001). A review of demographic forecasting models for mortality. In E. Tableau, A. Van Den Berg Jeths & C. Heathcote (Eds.), Forecasting mortality in developed countries: Insights from a statistical, demographic and epidemiological perspective, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. pp. 1-32.
- Wilmoth, J.R., (2002). Methods protocol for the human mortality database. <<http://www.mortality.org/Public/Docs/Methods Protocol.pdf>> [Accessed 2013/06/03].