Iran. J. Insur. Res., 14(2): Pages: 95-108, Spring 2025, Serial #52

Iranian Journal of Insurance Research
(IJIR)

Homepage: https://ijir.irc.ac.ir/?lang=en

Iranian Insurance Research Center (IIRC)

ORIGINAL RESEARCH PAPER

Optimal investment portfolio in defined contribution pension plans with target-based mean–variance approach

N. Modarresi*, P. Yahyavi

Department of Mathematics, Faculty of Statistics, Mathematics, and Computer, Allameh Tabataba'i University, Tehran, Iran

ARTICLE INFO

Article History:
Received 10 July 2024
Revised 07 October 2024
Accepted 07 December 2024

Keywords:
Defined contribution pension plan
Geometric Brownian motion with two Factors
Martingale method
Stochastic optimal control
Vasicek model

*Corresponding Author:
Email: *n.modarresi@atu.ac.ir*
Phone: +9821 48390000
ORCID: 0000-0003-0229-2011

DOI: 10.22056/ijir.2025.02.01

ABSTRACT

BACKGROUND AND OBJECTIVES: Companies and institutes in industrial and developed countries have changed their pension plans from defined benefit (DB) plans to defined contribution (DC) ones. By this approach, they have transferred the risk of forming and managing a portfolio to buy suitable life insurance at the time of retirement to the employees of these centers. In line with these changes, the aim of this paper is to present an optimal investment portfolio to buy a favorable life insurance at the time of retirement.
METHODS: In this paper, with the aim of determining an optimal investment portfolio during the accumulation phase in an efficient market, the Martingale method and a target-based mean-variance approach are applied to solve the stochastic optimal control problem.
FINDINGS: By the presented method, we explicitly acquire optimal investment strategy during the accumulation phase by the time of retirement. An optimal investment strategy is an optimal investment portfolio where available assets in financial markets are included. Financial markets consist of risky assets, riskless assets and cash where the price of risky assets follows the geometric Brownian motion model. The investor's contributions to the pension plan also follow geometric Brownian motion with two factors and the interest rate has Vasicek model. Finally, using the historical data of the financial market of Iran, we calibrate the parameters of the introduced models and construct the corresponding optimal portfolio. For investment strategies with low, mild, and high risk tendencies, we simulate the construction and change in the value of the optimal investment portfolio for each year of the accumulation phase.
CONCLUSION: Based on the simulations conducted, the high risk strategy, with a small percentage of assets allocated to investment in risky assets, eliminates opportunities for profit through risk-taking, which may result in an undesirable accumulated fund. On the other hand, low risk startegies, with a high percentage of assets allocated to investment in risky assets, increases bankruptcy and failing probability to reach a minimum level of accumulated capital. Therefore, according to these results, a mild risk- strategy, which simultaneously emphasizes opportunities for risk-taking and greater guarantee about the minimum accumulated capital, can meet the needs of a wide range of investors.

نشریه علمی پژوهشنامه بیمه

سایت نشریه: https://ijir.irc.ac.ir/?lang=fa

مقاله علمی

سبد بهینهٔ سرمایه‌گذاری در طرح‌های بیمه با مشارکت معین با رویکرد میانگین- واریانس هدف‌محور

نویده مدرسی[*]، پارسا یحیوی

گروه ریاضی، دانشکده آمار، ریاضی و رایانه، دانشگاه علامه طباطبائی، تهران، ایران

اطلاعات مقاله

تاریخ های مقاله:

تاریخ دریافت: ۲۰ تیر ۱۴۰۳

تاریخ داوری: ۱۶ مهر ۱۴۰۳

تاریخ پذیرش: ۱۷ آذر ۱۴۰۳

کلمات کلیدی:

حرکت براونی هندسی با دو عامل

روش مارتینگل

طرح بیمه با مشارکت معین

کنترل بهینهٔ تصادفی

مدل وسیچک

[*]نویسنده مسئول:

ایمیل: n.modarresi@atu.ac.ir

تلفن: ۴۸۳۹۰۰۰۰ ۹۸۲۱+

ORCID: 0000-0003-0229-2011

DOI: 10.22056/ijir.2025.02.01

چکیده:

پیشینه و اهداف: شرکت‌ها و مؤسسات در کشورهای پیشرفته و صنعتی طرح‌های بازنشستگی خود را از طرح‌هایی با مزایای معین به طرح‌هایی با مشارکت معین تغییر داده‌اند. آن‌ها با این رویکرد، ریسک تشکیل و کنترل یک سبد سرمایه برای خرید بیمهٔ عمر مناسب برای بازنشستگی را بر عهدهٔ کارکنان این مراکز قرار داده‌اند. در راستای این تغییرات هدف این مقاله ارائهٔ سبد سرمایهٔ بهینه برای خرید بیمهٔ عمر مطلوب در زمان بازنشستگی است.

روش‌شناسی: در این مقاله با هدف یافتن یک سبد سرمایهٔ بهینه در دورهٔ تجمیع اعتبار مالی در یک بازار کامل از روش مارتینگل و رویکرد میانگین- واریانس هدف‌محور برای حل مسئلهٔ کنترل بهینهٔ تصادفی استفاده می‌شود.

یافته‌ها: با استفاده از روش ارائه‌شده، استراتژی بهینهٔ سرمایه‌گذاری در دوران تجمیع سرمایه تا پیش از بازنشستگی را به‌طور صریح به دست می‌آوریم. استراتژی بهینه، سبد سرمایه‌گذاری بهینه‌ای متشکل از دارایی‌های در دسترس در بازار مالی معرفی شده است. بازار مالی مورد نظر از دو دارایی ریسکی و بدون ریسک و پول نقد تشکیل شده است که دینامیک قیمت دارایی ریسکی از مدل حرکت براونی هندسی پیروی می‌کند. پرداخت‌های سرمایه‌گذار به طرح بیمه نیز از مدل حرکت براونی هندسی با دو عامل تبعیت می‌کنند و نرخ بهره دارای مدل وسیچک است. در نهایت با استفاده از داده‌های تاریخی بازار مالی ایران پارامترهای مدل‌های معرفی‌شده را کالیبره می‌کنیم و سبد بهینهٔ متناظر را تشکیل می‌دهیم. به‌ازای استراتژی‌های سرمایه‌گذاری با ریسک‌گریزی پایین، متعادل و بالا روند ساخت و تغییر ارزش سبد سرمایه‌گذاری بهینه در هر سال از دورهٔ تجمیع را شبیه‌سازی می‌کنیم.

نتیجه‌گیری: با توجه به شبیه‌سازی‌های انجام‌شده، استراتژی با ریسک‌گریزی بالا، با تخصیص درصد کمی از دارایی به سرمایه‌گذاری در دارایی ریسکی، فرصت‌های کسب سود از طریق پذیرش ریسک را از بین می‌برد؛ بنابراین ممکن است سرمایهٔ تجمیع‌شده نامطلوب باشد. ازطرفی ریسک‌گریزی پایین، با تخصیص درصد بالایی از دارایی به سرمایه‌گذاری در دارایی ریسکی، احتمال ورشکستگی و نرسیدن به حداقلی از سرمایهٔ تجمیع‌شده را افزایش می‌دهد. بنابراین با توجه به این نتایج استراتژی ریسک‌گریزی متعادل که هم‌زمان به موقعیت‌های پذیرش ریسک و همچنین تضمین بیشتر دربارهٔ حداقل سرمایهٔ تجمیع‌شده تأکید می‌کند، توان پاسخگویی به نیاز طیف وسیعی از سرمایه‌گذاران را دارد.

***توجه:** مدت‌زمان بحث و انتقاد برای این مقاله تا ۱ ژوئیه ۲۰۲۵ در وب‌سایت IJIR در «نمایش مقاله» باز است.*

مقدمه

در اوایل قرن بیست و یکم و با اوج‌گیری بحران مالی که موجب ورشکستگی شرکت‌های بسیاری در کشورهای صنعتی شد، بسیاری از صنایع در برآوردن تعهدات خود در قبال پرداخت حقوق بازنشستگی کارمندان دچار مشکل شدند. به‌موجب این رویداد افزایش تمایل افراد و شرکت‌ها به طرح‌های بیمه با مشارکت معین که از سال‌های قبل نیز در حال رشد بود، شدت بیشتری گرفت (Ilmanen *et al.*, 2017). به‌موجب این طرح شرکت‌ها با کسر بخشی از درآمد سالیانه کارکنان متعهد می‌شدند که در زمان بازنشستگی حقوق مناسبی به آن‌ها پرداخت کنند. این روش ریسک سرمایه‌گذاری برای بازنشستگی را کاملاً متوجه شرکت‌ها می‌کرد، درحالی‌که ارزش منابع مالی‌ای که آن‌ها برای پرداخت تعهدات بیمه‌ای خود در نظر داشتند به‌شدت کاهش پیدا کرده بود (Farrell and Shoag, 2015). این عوامل موجب شد شرکت‌ها با تغییر روش خود به‌سمت طرح بیمه با مشارکت معین حرکت کنند که به‌موجب این طرح‌ها حقوق و مزایای کارکنان به‌طور کامل به آن‌ها پرداخت می‌شد. در مقابل شرکت هیچ‌گونه مسئولیتی در ارتباط با بیمهٔ افراد نداشت و کارکنان می‌بایست برای زمان بازنشستگی خود برنامه‌ریزی می‌کردند. این طرح بیمه به ایجاد مسائل بسیاری در زمینهٔ سرمایه‌گذاری برای بازنشستگی منجر شد. از جملهٔ این مسائل نحوهٔ تشکیل سبد سرمایهٔ بهینه‌ای است که بتواند در طول دورهٔ تجمیع، یعنی از زمان شروع به کار تا زمان بازنشستگی، اعتبار مالی لازم برای خرید بیمهٔ عمر با حقوق پرداختی مناسب پس از بازنشستگی را فراهم کند. علاوه‌بر بیشینه کردن اعتبار مالی انباشته در این سبد، کمینه کردن احتمال ورشکستگی فرد نیز از اهمیت فراوانی برخوردار است، زیرا ممکن است دورهٔ سرمایه‌گذاری به‌نحوی پیش برود که اعتبار مالی تجمیع‌شده امکان خرید بیمهٔ عمر مناسب را برای سرمایه‌گذار فراهم نکند (Forsyth and Vetzal, 2019).

بسیاری از کشورهای در حال پیشرفت به‌دنبال ایجاد تغییر در نگرش خود به طرح‌های بیمه هستند و در این راستا به افزایش طرح‌های بیمه با مشارکت معین روی می‌آورند (Eling and Loperfido, 2019). با توجه به تمایل روزافزون مردم ایران به برخورداری از روش‌های متنوع خرید بیمه‌های بازنشستگی، اهمیت تعیین روش بهینهٔ سرمایه‌گذاری در این طرح‌های بیمه بیش‌ازپیش نمایان شده است (Dindar Kaleh Sar and Dashtbany, 2022). پاسخ به این پرسش که در دورهٔ تجمیع، سرمایه‌گذار باید چگونه اعتبار مالی خود را سرمایه‌گذاری کند به حل مسئلهٔ کنترل بهینه تصادفی منجر می‌شود. حل این مسئله فرایند بهینهٔ سرمایه‌گذاری را تعیین می‌کند، به این نحو که در ابتدای هر سال در دورهٔ تجمیع درصدی از اعتبار مالی انباشته‌شده تا آن سال که باید در هریک از دارایی‌های در دسترس سرمایه‌گذاری شود، مشخص می‌شود.

نظر به اهمیت تعیین سبد بهینهٔ سرمایه‌گذاری ضروری است این سبد بهینه را مطابق با شرایط دارایی‌های در دسترس در بازار مالی ایران تعیین کنیم و برای اجرای طرح‌های بیمه با مشارکت معین به کار بریم که در این راستا پژوهش Zobeiri and Motameni (2020) شایان توجه است. در این پژوهش با فرض کامل بودن بازار از روش میانگین ـ واریانس برای حل این مسئله و به دست آوردن جواب صریح آن استفاده می‌کنیم. در روش میانگین ـ واریانس فقط به درجهٔ ریسک‌گریزی سرمایه‌گذار پرداخته می‌شود بنابراین مسئله را به‌طور معادل با یک روش هدف‌محور حل می‌کنیم. در این روش به‌جای درجهٔ ریسک‌گریزی از هدف نهایی اعتبار مالی برای تعیین و کنترل نحوهٔ سرمایه‌گذاری استفاده می‌شود. مسئله را به روش مارتینگل حل می‌کنیم و سبد بهینه را به دست می‌آوریم. هدف اصلی این پژوهش یافتن جواب تحلیلی مسئلهٔ کنترل تصادفی برای تعیین سبد بهینهٔ سرمایه‌گذاری در طرح بیمه با مشارکت معین است.

این تحقیق به ترتیب زیر نگارش شده است. ابتدا مدل سرمایه‌گذاری و بازار مالی در دسترس و همچنین حالت کلی مسئلهٔ کنترل بهینهٔ تصادفی را در مبانی نظری معرفی می‌کنیم. پس از بیان پیشینهٔ پژوهش در بخش روش‌شناسی ابتدا چگونگی تبدیل مسئلهٔ میانگین ـ واریانس به مسئلهٔ هدف‌محور را بیان می‌کنیم و پس از آن به انتخاب دینامیک دارایی‌های موجود در بازار مالی و سبد بهینهٔ متناظر با آن می‌پردازیم. در نهایت با توجه به نتایج بخش‌های قبل و به کمک رابطهٔ به‌دست‌آمده برای سبد بهینه در دورهٔ تجمیع سرمایه‌گذاری این سبد را به‌ازای سه استراتژی با زیان‌گریزی پایین، متعادل و بالا بازسازی می‌کنیم و به بررسی نتایج حاصل از آن می‌پردازیم.

مبانی نظری پژوهش

معرفی مدل و بازار مالی

فرض می‌کنیم بازار مالی که سرمایه‌گذار در چهارچوب آن به حل مسئلهٔ کنترل بهینهٔ تصادفی می‌پردازد کامل باشد. در این بازار ریسک توسط n حرکت براونی مستقل $W(t)$ که بر فضای احتمال پالایش‌شده $(\Omega, \{\mathrm{F}_t\}_{0\le t\le T}, P)$ تعریف شده‌اند، مدل‌سازی می‌شود. $\{F_t\}_{0\le t\le T}$ پالایهٔ تولیدشده توسط حرکت‌های براونی و P اندازهٔ احتمال عینی بازار است.

فرض ۱: متغیر تصادفی $L(t)$ از یک فرایند تصادفی که بیانگر عامل تصادفی موجود در بازار مانند نرخ بهره، درآمد و امثال آن است در هر لحظهٔ t از دینامیک زیر پیروی می‌کند:

$$dL(t) = \mu_L(t,l)dt + \Pi(t,l)dW(t) \qquad (۱)$$

که در آن $L(t)$ برداری با s مؤلفه، $\Pi(t,l)$ ماتریسی $s\times n$ و $L(0)=L_0\in R^s$ و دینامیک قیمت دارایی بدون ریسک به‌صورت $dR(t)=R(t)r(t,l)dt$ تعریف می‌شود که در آن $r(t,l)$ نرخ بهره بدون ریسک آنی است که در فصل بعد در چهارچوب پژوهش حاضر با مدل وسیچک تعیین می‌شود (Menoncin and Vigna, 2017).

فرض ۲: بازار مالی شامل n دارایی ریسکی با دینامیک قیمت زیر است:

$$dP(t)=I_P\left[\mu(t,l)dt+\sum(t,l)dW(t)\right] \qquad (۲)$$

که در آن I_P یک ماتریس قطری $n\times n$ است که روی قطر اصلی آن قیمت دارایی های ریسکی $P_1,P_2,\ldots,P_n$ قرار دارد و سایر درایه‌های آن برابر صفرند و همچنین $P(0)=P_0\in R^n$. $\mu(t,l)$ برداری n مؤلفه‌ای و $\sum(t,l)$ ماتریس واریانس_ کواریانس $n\times n$ است (Menoncin and Vigna, 2017). رانش و انتشار به‌ترتیب در روابط (۱) و (۲) به‌گونه‌ای تعریف می‌شوند که در شرط لیپشیتز صدق می‌کنند و شرایط وجود و یکتایی جواب این دو معادله برقرار است.

گزارۀ ۱: اگر بازار مالی مورد نظر کامل و بدون آربیتراژ باشد، آنگاه یک اندازه مارتینگل ریسک خنثی معادل یکتا مانند Q وجود دارد و بردار قیمت بازاری ریسک $\xi(t,l)$ موجود و یکتا است و از حل معادلۀ زیر به دست می‌آید (Bjork, 2009).

$$\sum(t,l)\xi(t,l)=\mu(t,l)-r(t,l)\mathbf{1}$$

به‌طوری که 1 برداری با همۀ مؤلفه‌های یک و ماتریس $\sum(t,l)$ معکوس‌پذیر باشد.

گزارۀ ۲: فرض می‌کنیم $\xi(t,z)$ در شرط نوویکوف صدق کند، در این صورت طبق قضیۀ گیرسانوف تغییرات فرایند وینر تحت اندازۀ Q از دینامیک $dW^Q(t)=-\xi(t,l)dt+dW(t)$ تبعیت می‌کند که در آن $W(t)$ فرایند وینر تحت اندازۀ عینی بازار، P است. مشتق رادون _نیکودیم اندازۀ عینی بازار نسبت به اندازۀ مارتینگل ریسک خنثی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$m(t_0,t)=e^{-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\xi(u,l)'\xi(u,l)du+\int_{t_0}^{t}\xi(u,l)'dW(u)}$$

که از جواب معادلۀ دیفرانسیل زیر به‌ازای مقادیر اولیۀ $m(t_0,t_0)=1$ به دست می‌آید:

$$dm(t_0,t)=m(t_0,t)\xi(u,l)'dW(t)$$

که در آن $'$ نماد ترانهاده است (Bjork, 2009).

گزارۀ ۳: به‌ازای هر متغیر تصادفی t-اندازه‌پذیر مانند $L(t)$ رابطۀ

$$E_{t_0}^{Q}\left[L(t)\right]=E_{t_0}\left[L(t)m(t_0,t)\right] \qquad (۳)$$

برقرار است که در آن $E_{t_0}^{Q}$ و E_{t_0} به‌ترتیب امید ریاضی شرطی $E\left[.|F_t\right]$ تحت اندازۀ مارتینگل ریسک خنثی معادل و تحت اندازۀ احتمال عینی بازار هستند (Bjork, 2009).

گزارۀ ۴: فرض کنید $B(t,T)$ قیمت یک ورقه قرضه صفر کوپن با سررسید T و $\sigma_B(t,T)$ جمله رانش در $\frac{dB(t,T)}{B(t,T)}$ باشد. تغییرات فرایند وینر تحت اندازه سلف F_T به دینامیک $dW^{F_T}(t)=-\sigma_B(t,T)dt+dW^Q(t)$ تبدیل می‌شود. اگر شاخص ارزش جدید بازار مالی را قیمت ورقۀ قرضۀ صفر کوپن، $B(t,T)$، لحاظ کنیم، آنگاه به‌ازای هر متغیر تصادفی T-اندازه‌پذیر مانند $L(T)$ داریم

$$E_t^{Q}\left[L(T)e^{-\int_t^T r(u,l)du}\right]=E_t^{F_T}\left[L(T)\right]B(t,T) \qquad (۴)$$

به‌طوری که $B(t,T)=E_t^{Q}\left[e^{-\int_t^T r(u,l)du}\right]$ (Bjork,2009).

به کمک این رابطه تأثیر پرداخت‌ها به طرح بیمه در طول دورۀ تجمیع سرمایه‌گذار راحت‌تر بررسی می‌شود. حال دینامیک اعتبار مالی انباشتۀ فرد در هر زمان تا پیش از پایان دورۀ تجمیع را تعیین می‌کنیم.

گزارۀ ۵: اگر پرداخت‌های تصادفی فرد به طرح بیمه در هر بازه در دورۀ تجمیع را با $c(t,l)>0$ و درصد سرمایه‌گذاری‌شده در دارایی‌های ریسکی در هر دوره را نیز با $\omega(t)=(\omega_1(t),\ldots,\omega_n(t))$ نشان دهیم، آنگاه دینامیک اعتبار مالی سرمایه‌گذار $X(t)$ به‌صورت

$$dX(t)=\big(X(t)r(t,l)+c(t,l)+\omega'(t)(\mu(t,l)-r(t,l)\mathbf{1})\big)dt+\omega'(t)\textstyle\sum(t,l)dW(t) \qquad (۵)$$

خواهد بود (Bjork,2009).

مسئلۀ کنترل بهینۀ تصادفی

قضیۀ ۱: اگر مدل مسئلۀ کنترل بهینۀ تصادفی سرمایه‌گذار به‌صورت

$$\begin{aligned}\min_{\omega}\quad & \alpha V_0[X(T)]-E_0[X(T)]\\ s.t.\quad & \sum_{i=1}^{n}\omega_i(T)=1\end{aligned} \qquad (۶)$$

که در آن $\alpha>0$ درجۀ ریسک‌گریزی و اعتبار مالی سرمایه‌گذار در هر لحظه از دینامیک (۵) تبعیت کند، آنگاه می‌توان بردار وزن‌های بهینۀ $\omega^*(t)$ را از طریق حل مسئلۀ معادل

$$\begin{aligned}\min_{\omega}\quad & E_0\left[\tfrac{1}{2}(X(T)-\gamma)^2\right]\\ s.t.\quad & \sum_{i=1}^{n}\omega_i=1\end{aligned} \qquad (۷)$$

به دست آورد که در آن γ هدف نهایی سرمایه‌گذار از اعتبار مالی در پایان دورۀ تجمیع است (Zhou and Li, 2000).

اگر جواب مسئله بردار وزن‌های بهینه $\omega^*(t)$ باشد، آنگاه $X^*(T)$. اعتبار مالی انباشتۀ نهایی حاصل از پیروی از وزن‌های بهینه است و مرز کارای این مسئله با مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب $\left(V_0\left[X^*(T)\right],E_0\left[X^*(T)\right]\right)$ تعیین می‌شود. مرز کارا مجموعه‌ای

از ترکیب‌های بهینهٔ سبد سرمایه‌گذاری است که به‌ازای هر سطح ریسک معین، بیشترین بازده را ارائه می‌دهند و به‌ازای هر سطح بازده معین، کمترین ریسک را دارند. این مرز نمایانگر انتخاب‌هایی است که از نظر ریسک و بازده، بهینه و غیرقابل بهبود هستند.

در رابطهٔ (۷) γ هدف نهایی سرمایه‌گذار از اعتبار مالی در پایان دورهٔ تجمیع است. استفاده از روش‌های حل مسئلهٔ کنترل بهینهٔ تصادفی به‌وسیلهٔ استراتژی‌های هدف‌محور مزایای فراوانی دارد. حین استفاده از این روش‌ها نقش هدف نهایی اعتبار مالی در تعیین استراتژی سرمایه‌گذاری در طول دورهٔ تجمیع پررنگ‌تر می‌شود. به‌علاوه برای سرمایه‌گذاران غیرحرفه‌ای انتخاب هدف نهایی در ارتباط با اعتبار مالی انباشته‌شان در انتهای دورهٔ تجمیع امری به‌مراتب ساده‌تر از انتخاب یک مقدار از یک پارامتر پیچیده مانند درجهٔ ریسک‌گریزی است. به همین دلیل به‌جای مسئلهٔ (۶) مسئلهٔ معادل (۷) را حل می‌کنیم.

در مطالعات مربوط به تعیین استراتژی بهینه برای طرح بیمه با مشارکت معین دو روش کلی پیگیری می‌شود. اگر بازار مالی در دسترس ناکامل باشد از روش برنامه‌ریزی پویا و اگر بازار کامل باشد از روش مارتینگل برای یافتن استراتژی بهینه استفاده می‌شود. در این مقاله با توجه به فرض کامل بودن بازار مالی از روش مارتینگل برای یافتن پاسخ مسئلهٔ (۷) استفاده می‌کنیم. متغیر تصمیم مسئلهٔ (۷) اعتبار مالی انباشته در پایان دورهٔ تجمیع یا $X(T)$ است؛ بنابراین داریم

$$\min_{\omega}\ E_0\left[\tfrac{1}{2}(X(T)-\gamma)^2\right] \qquad (۸)$$

$$s.t.\quad E_0^Q\left[-\int_0^T c(s,l)e^{-\int_0^s r(u,l)du}ds + X(T)e^{-\int_0^T r(u,l)du}\right]\le x_0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i=1$$

اولین قید مسئله نشان می‌دهد که میانگین تحت اندازهٔ مارتینگلِ اختلاف ارزش اعتبار مالی تنزیل‌یافته تا زمان شروع دورهٔ تجمیع از ارزش تنزیل‌یافته پرداخت‌های صورت‌گرفته در طول دورهٔ تجمیع، باید کمتر از مقدار اولیه در دسترس برای سرمایه‌گذاری باشد. ابتدا با حل این مسئله اعتبار مالی نهایی بهینهٔ $X^*(T)$ را به دست می‌آوریم. مسئلهٔ بهینه‌سازی غیرخطی را به کمک تابع لاگرانژ حل می‌کنیم.

قضیهٔ ۲: ارزش سبد بهینه‌ای که در پایان دورهٔ تجمیع سرمایه‌گذاری با پیروی از مسئلهٔ (۷) به دست می‌آید برابر است با

$$X^*(T)=\gamma-\lambda e^{-\int_0^T r(u,l)du}m(0,T) \qquad (۹)$$

که در آن γ هدف نهایی سرمایه‌گذار از اعتبار مالی در پایان دورهٔ تجمیع، $m(0,T)$ مشتق رادون_ نیکودیم اندازهٔ عینی بازار نسبت به اندازهٔ مارتینگل ریسک خنثی و λ ضریب لاگرانژ است که از رابطهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$\lambda=\frac{\gamma B(0,T)-\int_0^T E_0^{F_s}[c(s,l)]B(0,s)ds-x_0}{E_0\left[e^{-2\int_0^T r(u)du}m^2(0,T)\right]} \qquad (۱۰)$$

همچنین می‌توان جواب بهینهٔ $X^*(T)$ را به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$X^*(T)=\gamma-(\gamma-\chi_T)B(0,T)E_0\left[e^{2\Phi(0,T)}\right]^{-1}e^{\Phi(0,T)} \qquad (۱۱)$$

که در آن تابع $\Phi(t,T)$ به‌صورت

$$\Phi(t,T)=-\int_t^T r(u,l)du-\frac{1}{2}\int_t^T \xi(u,l)^T\xi(u,l)du-\int_t^T \xi(u,l)^T dW(u)$$

تعریف می‌شود (Menoncin and Vigna, 2017).

مقدار χ_T کلید اصلی پیاده‌سازی روش هدف‌محور است. مقدار χ_T برابر است با اعتبار مالی‌ای که سرمایه‌گذار می‌تواند بدون پذیرش هیچ‌گونه ریسک و تنها با سرمایه‌گذاری در دارایی بدون ریسک یا حساب بانکی در طول دورهٔ تجمیع به دست آورد. χ_T ارزش تجمیع‌شدهٔ اعتبار مالی اولیهٔ x_0 و پرداخت‌های صورت‌گرفته به طرح بیمه در طول دورهٔ تجمیع است که همگی تا لحظهٔ صفر تنزیل شده‌اند و از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$\chi_T=\frac{x_0+\int_0^T E_0^{F_s}[c(s,l)]B(0,s)ds}{B(0,T)} \qquad (۱۲).$$

χ_T ارزش اعتبار مالی انباشته بدون ریسک در پایان دورهٔ تجمیع است؛ بنابراین هر سرمایه‌گذاری انتظار دارد در مقابل پذیرش ریسک و سرمایه‌گذاری بخشی از اعتبار مالی خود در دارایی ریسکی، اعتبار مالی نهایی‌ای فراتر از χ_T به دست آورد. بنابراین χ_T یک کران پایین برای هدف نهایی اعتبار مالی انباشته خواهد بود و اهداف هر سرمایه‌گذار متناسب با میزان ریسک پذیری یا ریسک‌گریزی وی به‌صورت ضریبی بزرگ‌تر از واحد از χ_T بیان می‌شود.

قضیهٔ ۳: با در نظر گرفتن مفروضات مسئلهٔ سبد بهینهٔ سرمایه‌گذاری یا $\omega^*(t)$، که وزن‌های بهینهٔ دارایی‌های در دسترس برای تشکیل سبد بهینه را تعیین می‌کند، به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\omega^*(t)=\left(\gamma B(t,T)-\int_t^T E_t^{F_s}[c(s,l)]B(t,s)ds-X^*(t)\right)(\Sigma')^{-1}\xi$$
$$+(\Sigma')^{-1}\Omega'\frac{\partial\left(\gamma B(t,T)-\int_t^T E_t^{F_s}[c(s,l)]B(t,s)ds\right)}{\partial L(t)}+\Big(X^*(t)+$$
$$\int_t^T E_t^{F_s}[c(s,l)]B(t,s)ds-\gamma B(t,T)\Big)(\Sigma')^{-1}\Omega'\frac{\frac{\partial E_t\left[e^{2\Phi(0,T)}\right]}{\partial z(t)}}{E_t\left[e^{2\Phi(0,T)}\right]} \qquad (۱۳)$$

برای جزئیات اثبات به مقالهٔ Menoncin and Vigna (2017) مراجعه کنید. اگر $\Phi(t,T)$ دارای توزیع گوسی باشد می‌توان از ساده‌سازی زیر استفاده کرد:

$$E_t\left[e^{2\Phi(0,T)}\right]^{-1}\frac{\partial E_t\left[e^{2\Phi(0,T)}\right]}{\partial L(t)}=2\frac{\partial}{\partial L(t)}\left(E_t\left[\Phi(t,T)\right]+V_t\left[\Phi(t,T)\right]\right).$$

$X^*(t)$ در رابطهٔ (۱۱) از طریق تجمیع اعتبارات مالی

پرداخت‌شده به طرح بیمه و نرخ بازگشت سرمایهٔ بازار مالی محاسبه می‌شود. بنابراین سرمایه‌گذار فقط در صورتی می‌تواند به سود برسد و یا بخشی از سرمایهٔ خود را حفظ کند که ثروت اکیداً مثبت باشد و ورشکستگی رخ ندهد. بنابراین احتمال ورشکستگی سرمایه‌گذار به شکل صریح زیر محاسبه می‌شود:

$$P\{X^*(T) < 0\} = P\left\{\Phi(t,T) > \ln\left(\frac{\gamma}{\gamma-\chi_T}\right) + \ln\left(E_0\left[e^{\Phi(0,T)}\right]^{-1} E_0\left[e^{2\Phi(0,T)}\right]\right)\right\} \quad (۱۴)$$

و همچنین با توجه به رابطهٔ (۱۱) میانگین و واریانس ثروت به‌صورت زیر تعریف می‌شوند که برای رسم مرز کارا نیز استفاده می‌شود.

$$E_0[X^*(T)] = \gamma - (\gamma-\chi_T)E_0\left[e^{\Phi(0,T)}\right]^2 E_0\left[e^{2\Phi(0,T)}\right]^{-1},$$

$$V_0[X^*(T)] = (\gamma-\chi_T)^2 E_0\left[e^{\Phi(0,T)}\right]^2 E_0\left[e^{2\Phi(0,T)}\right]^{-2} V_0\left[e^{\Phi(0,T)}\right]$$

با جای‌گذاری γ از برابری دوم در معادلهٔ اول مرز کارا به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$E_0[X^*(T)] = \chi_T + \sqrt{E_0[e^{\Phi(0,T)}]^{-2}E_0[e^{2\Phi(0,T)}] - 1}\sqrt{V_0[X^*(T)]}$$

مروری بر پیشینهٔ پژوهش

طرح‌های بازنشستگی با مزایای معین برای چندین دهه نقش مهمی در بخش‌های بازنشستگی کشورهای توسعه‌یافته در آمریکای شمالی، بریتانیا و اروپای غربی ایفا کرده‌اند. بااین‌حال، در آغاز قرن ۲۱، تغییرات در روندهای جمعیتی و نوسانات بازارهای مالی جهانی به‌طور چشمگیری وضعیت مالی این طرح‌ها را مختل کرد (Lukovic and Savićević, 2021). در پی این حوادث و به‌دلیل نگرانی‌های فزاینده در خصوص پایداری مالی و مدیریت ریسک‌های مرتبط با تعهدات بلندمدت بازنشستگی، شرکت‌ها و صنایع بزرگ به‌طور فزاینده‌ای به‌سمت استفاده از طرح‌های بیمه با مشارکت معین روی آورده‌اند. تغییر رویکرد شرکت‌ها از طرح‌های بازنشستگی با مزایای معین به طرح‌های با مشارکت معین، کارکنان را با چالش‌های جدیدی در زمینهٔ سرمایه‌گذاری برای دوران بازنشستگی مواجه کرد. این مسئله را نخستین بار Merton (2014) مطرح کرد. او به‌طور ویژه به چالش‌های سرمایه‌گذاری بهینه برای دوران بازنشستگی اشاره کرد.

تحقیقات نشان داده‌اند که در حل این مسئله که به مسئلهٔ کنترل بهینه تصادفی منجر می‌شود، انتخاب تابع هدف از اهمیت فراوانی برخوردار است، زیرا انتخاب‌های متفاوت از این تابع تأثیر فراوانی بر چگونگی تشکیل سبد بهینهٔ سرمایه‌گذار می‌گذارد. استفاده از توابع مطلوبیت و انتخاب مطلوبیت اعتبار مالی تجمیع‌شده در پایان دورهٔ تجمیع یکی از متداول‌ترین روش‌ها برای تعریف تابع هدف مسئلهٔ کنترل بهینهٔ تصادفی است. مثلاً Blake *et al.* (2013) و Wiafe *et al.* (2020) از جمله پژوهشگرانی بودند که مطلوبیت اعتبار مالی نهایی را به‌عنوان تابع هدف مسئله تعریف و با بیشینه کردن آن مسئله را حل کردند. در پژوهش Vahabi and Payandeh Najafabadi (2023) از دو تابع مطلوبیت CRRA، نمایی و لگاریتمی برای تعیین تابع هدف مسئلهٔ کنترل بهینهٔ تصادفی استفاده شده است. همچنین Keganneng and Basimanebotlhe (2022) و Dong and Zheng (2019) نیز به‌ترتیب از توابع مطلوبیت توانی و زیان‌گریز استفاده کرده‌اند.

علاوه‌بر استفاده از توابع مطلوبیت، از دیگر روش‌های پرکاربرد در تعریف تابع هدف مسئلهٔ کنترل بهینهٔ تصادفی می‌توان به روش میانگین ـواریانس اشاره کرد. در این روش تفاضل واریانس اعتبار مالی تجمیع‌شده از امید ریاضی آن را به‌عنوان تابع هدف مسئله انتخاب و کمینه می‌کنند. در پژوهش‌های Chang *et al.* (2022) و Guan and Liang (2014) از این روش برای تعریف تابع هدف و حل مسئلهٔ کنترل بهینهٔ تصادفی استفاده شده است. همچنین Zare zade *et al.* (2024) با استفاده از رویکرد میانگین ـواریانس و مبتنی بر بازده بتا و مدل CAPM، روشی دقیق‌تر برای ساخت سبد بهینه بر پایهٔ سنجه‌های ریسک ارائه کردند. با توجه به بررسی فراوان استفاده از تابع مطلوبیت در مطالعات پیشین، در مقالهٔ حاضر با استفاده از رویکرد میانگین ـواریانس تابع هدف مسئلهٔ کنترل بهینهٔ تصادفی را تعریف می‌کنیم. استفاده از این دیدگاه مستلزم تعیین درجهٔ ریسک‌گریزی است که برای اغلب سرمایه‌گذاران دشوار است و در بیشتر مطالعات انجام‌شده به نحوهٔ انتخاب درجهٔ ریسک‌گریزی توجه کمی شده است.

در مقالهٔ Nadiri and Khani (2022) با اشاره به نقش احساسات در تصمیم‌گیری سرمایه‌گذاران در بورس اوراق بهادار ایران، بر تأثیر عوامل مختلف در مدل‌های بهینه‌سازی سبد سهام پرداخته‌اند که مبتنی بر واریانس هستند، اما به تأثیر مستقیم درجهٔ ریسک‌گریزی بر نتیجهٔ نهایی مسئلهٔ کنترل بهینه پرداخته نشده است. یکی از اهداف اصلی این مقاله حل مسئلهٔ کنترل بهینهٔ تصادفی با رویکرد میانگین ـواریانس به کمک مسئلهٔ هدف‌محور معادل است.

Zhou and Li (2000) در پژوهش خود نحوهٔ تبدیل تابع هدف به‌دست‌آمده از روش میانگین ـواریانس را به تابع هدف‌محور ارائه دادند. به کمک این تبدیل سرمایه‌گذار به جای تعیین درجه ریسک‌گریزی، هدف نهایی خود از اعتبار مالی تجمیع شده در پایان دوره تجمیع را مشخص می‌کند که به مراتب ساده‌تر خواهد بود (Donnelly *et al.*, 2022). در مقالهٔ حاضر نیز به کمک این تبدیل مسئلهٔ کنترل بهینهٔ تصادفی معادل را حل می‌کنیم که در آن هدف نهایی سرمایه‌گذار بسیار مهم است. در روش حل هدف‌محور، نحوهٔ انتخاب هدف‌های نهایی رفتار ریسکی سرمایه‌گذار را مشخص می‌کنند. هرچه هدف نهایی برای اعتبار مالی بالاتر در نظر گرفته شود، شخص ریسک‌پذیرتر خواهد بود و بالعکس.

دو رویکرد اصلی حل مسئلهٔ کنترل بهینهٔ تصادفی بر مبنای آنکه بازار مالی مفروض در مسئله کامل یا ناکامل باشد، به‌ترتیب روش مارتینگلی و روش عددی است. در پژوهش Anthropelos and Blontzou (2023) بازار ناکامل فرض شده، زیرا این فرض وجود دارد که درآمد سرمایه‌گذار به‌عنوان یک متغیر تصادفی در بازار مالی غیرقابل بازسازی است. ناکامل بودن بازار به وجود چندین قیمت متفاوت برای هریک از دارایی‌ها و سردرگمی سرمایه‌گذار منجر می‌شود و حتی در صورت برطرف کردن این مشکل یا تعریف اندازهٔ یکتا به کمک سنجه‌های ریسک، حل مسئلهٔ کنترل بهینهٔ تصادفی برآمده از آن همچنان بسیار دشوار خواهد بود و جواب صریحی به دست نمی‌دهد. فرض وجود بازار کامل این امکان را به سرمایه‌گذار می‌دهد تا از قرض گرفتن و فروش استقراضی در ساخت سبد بهینه استفاده کند و از آزادی عمل بیشتری در ساخت سبد برخوردار باشد. در پژوهش‌های Dong *et al.* (2020) و Ferreira Morici and Vigna (2024) پاسخ صریح مسئلهٔ کنترل بهینهٔ تصادفی از روش مارتینگل و با فرض کامل بودن بازار به دست آمده است. به‌طور مشابه در پژوهش Chen *et al.* (2017) نیز با کامل در نظر گرفتن بازار با استفاده از روش مارتینگی، جواب مسئله را به‌صورت تحلیلی به دست آوردند. همچنین Guan and Liang (2016) نیز در پژوهش خود با استفاده از ارزش در معرض خطر به‌جای روش مارتینگلی به حل مسئله پرداختند. با توجه به تأکید بر فرض کامل بودن بازار در مطالعات گذشته در مقالهٔ حاضر نیز بازار را کامل فرض می‌کنیم تا جوابی صریح به دست آوریم که استفاده از آن برای سرمایه‌گذار ساده‌تر باشد.

در کنار تعیین تابع هدف مسئلهٔ کنترل بهینهٔ تصادفی و مشخص کردن روش حل مسئله، پژوهشگران بسیاری به بررسی سایر عوامل تصادفی تأثیرگذار بر روند تجمیع اعتبار مالی در طرح‌های بیمه با مشارکت معین پرداختند. از جملهٔ این عوامل تصادفی نرخ بهره است که در این چهارچوب پژوهش Peymany *et al.* (2023) برای مدل‌سازی نرخ بهرهٔ بدون ریسک در بازار داخلی ایران از مدل وسیچک استفاده کردند.

از دیگر عوامل تأثیرگذار بر روند تجمیع اعتبار مالی پرداخت‌های سرمایه‌گذار به طرح بیمه است. Vigna (2012) با استفاده از روش حل هدف‌محور، در بازار مالی بلک_شولز اقدام به حل مسئلهٔ سرمایه‌گذاری برای طرح بیمه با مشارکت معین کرد که در آن پرداخت‌هایی که سالیانه به طرح بیمه صورت می‌گرفت ثابت در نظر گرفته شده بود. همچنین Ferreira Morici and Vigna (2024) در این همین چهارچوب پرداخت‌ها را زمان متغیر و غیرتصادفی در نظر گرفته بود. در این پژوهش علاوه‌بر گسترش کار وگنا تعداد دلخواهی دارایی ریسکی، منبع ریسک و متغیرهای حالت در یک بازار کامل در نظر می‌گیریم. افزایش تعداد دارایی‌های ریسکی در سبد و متنوع‌سازی در کاهش ریسک آن مؤثر است. در این پژوهش در حالت کلی سبد بهینه را با در نظر گرفتن n دارایی ریسکی تشکیل می‌دهد و در حالت خاص از یک دارایی ریسکی در شبیه‌سازی آن استفاده می‌کند. این دارایی ریسکی شاخص بورس انتخاب شده که برآیندی کلی از رفتار دارایی‌های ریسکی بازار مالی را به دست دهد و رفتار سبد شبیه‌سازی‌شده نزدیک به سبدی با چند دارایی ریسکی باشد. دلخواه بودن متغیرهای حالت این امکان را فراهم می‌کند تا عوامل تصادفی تأثیرگذار بر چگونگی طی شدن روند تجمیع اعتبار مالی را وارد مدل کنیم. از جملهٔ این عوامل که در این پژوهش به آن توجه بیشتری شده نرخ بهرهٔ تصادفی و پرداخت‌هایی است که در هر سال در طول دورهٔ تجمیع به ساخت سبد بهینه اختصاص داده می‌شود. این پرداخت‌ها تحت تأثیر عوامل تصادفی بسیاری که ممکن است بر درآمد سرمایه‌گذار یا توانایی وی در میزان تخصیص سرمایه اثر بگذارد، متغیری تصادفی هستند. ثابت در نظر گرفتن این متغیر می‌تواند به نتایجی نامطلوب در پایان دورهٔ تجمیع منجر شود.

روش‌شناسی پژوهش

تبدیل مسئلهٔ میانگین_واریانس به مسئلهٔ هدف‌محور

اغلب سرمایه‌گذاران در طرح‌های بازنشستگی با مشارکت معین برای تعیین نرخ ریسک‌گریزی خود با سختی‌هایی روبه‌رو هستند. تعیین میزان ریسک‌گریزی در قالب یک مقدار کمّی مانند α، عدم شفافیت بسیاری را برای سرمایه‌گذاران به همراه دارد. به همین دلیل مشخص کردن هدف نهایی دورهٔ سرمایه‌گذاری با واحد پول مثلاً مبلغی همچون γ برای سرمایه‌گذاران مناسب‌تر است. به همین دلیل هدف نهایی سرمایه‌گذار را به‌صورت ضریبی از اعتبار مالی قابل حصول بدون ریسک تعیین می‌کنیم که در فرمول χ_T به دست آمد. Zhou and Li (2000) نشان دادند که جواب مسئلهٔ (۶) را می‌توان به‌طور معادل از طریق حل مسئلهٔ (۷) به دست آورد که در آن α پارامتر برون‌زای ریسک‌گریزی است و اگر $X^*(T)$ جواب مسئلهٔ (۶) باشد، آنگاه β مسئله به‌صورت $\beta := 1 + 2\alpha E_0[X^*(T)]$ تعریف می‌شود. حال به کمک α و β حاصل در مسئلهٔ میانگین_واریانس، γ مسئلهٔ هدف‌محور به‌صورت $\gamma = \frac{\beta}{2\alpha}$ مشخص شده و به‌وسیلهٔ آن می‌توان مسئلهٔ معادل هدف‌محور (۷) را حل کرد. با توجه به روابط بالا و رابطهٔ (۱۱) داریم

$$\alpha = \frac{1}{2(\gamma - \chi_T)} E_0\left[e^{\Phi(0,T)}\right]^{-2} E_0\left[e^{2\Phi(0,T)}\right]$$

بنابراین α و γ با یکدیگر رابطهٔ عکس دارند و همچنین $\alpha > 0$ اگر و تنها اگر $\gamma > \chi_T$. به‌عبارت‌دیگر هدف سرمایه‌گذار کران پایینی دارد که همان سرمایه‌گذاری در دارایی بدون ریسک در تمام طول دورهٔ تجمیع یا χ_T است. بنا بر رابطهٔ (۱۱) و این فرض که $\gamma - \chi_T > 0$، سرمایه‌گذار هرگز به هدف نهایی خود نخواهد رسید و γ نقش کران بالایی را برای اعتبار مالی سرمایه‌گذار ایفا می‌کند. بنابراین γ همواره ضریبی مانند $\kappa > 1$ از χ_T است. در بخش آتی دینامیک پرداخت‌های سرمایه‌گذار به طرح بیمه و نرخ بهره و همچنین دینامیک قیمت دارایی ریسکی و بدون ریسک را تعیین می‌کنیم. با مشخص شدن بازار مالی مسئله، یعنی نرخ بهره و درآمد

کارکنان و دارایی‌های در دسترس برای تشکیل سبد سرمایه در دورهٔ تجمیع، مسئلهٔ کنترل بهینهٔ تصادفی را که در حالت کلی مطرح شد، در این حالت خاص حل می‌کنیم.

پیاده‌سازی و حل مسئلهٔ کنترل بهینهٔ تصادفی

در این بخش ابتدا به معرفی بازار مالی‌ای می‌پردازیم که مسئلهٔ کنترل بهینهٔ تصادفی با توجه به آن بررسی می‌شود. بردار $L(t)$ را که متغیر حالت و بیانگر عوامل تصادفی موجود در بازار است توسط دو متغیر حالت نرخ بهرهٔ بدون ریسک و درآمد سرمایه‌گذار تعریف می‌کنیم. همچنین دو دینامیک قیمت برای تعیین بردار $P(t)$ را بیان می‌کنیم که قیمت دارایی‌های موجود برای سرمایه‌گذاری است. سپس با توجه به حالت خاص تعیین‌شده مطابق با حالت کلی مسئله که در بخش قبل بررسی شد به حل مسئلهٔ کنترل بهینهٔ تصادفی می‌پردازیم و جواب صریح مسئله را به دست می‌آوریم.

معرفی دینامیک فضای حالت و دارایی‌های در دسترس

دینامیک نرخ بهره بدون ریسک از مدل وسیچک و دینامیک پرداخت‌های سرمایه‌گذار به طرح بیمه از مدلی با دو عامل (محرک) حرکت براونی تبعیت می‌کند. این دو متغیرهای حالت مسئله یا همان بردار $L(t)$ هستند که در ادامه به معرفی دینامیک آن‌ها تحت اندازهٔ احتمال عینی P می‌پردازیم. مدل نرخ بهرهٔ $r(t)$، همان مدل وسیچک

$$dr(t)=a\left(b-r(t)\right)dt+\sigma_r dW_r(t)$$

است. که در آن $r(0)=r_0$ و پارامترهای b، a و σ_r به‌ترتیب سرعت بازگشت به میانگین، میانگین بلندمدت و تلاطم نرخ بهرهٔ بدون ریسک هستند. پرداخت‌های سرمایه‌گذار به طرح بیمه با مشارکت معین درصدی از درآمد وی خواهد بود. بنابراین دینامیک این پرداخت‌ها را معادل دینامیک درآمد فرد در نظر می‌گیریم. درآمد هر شخص مرتبط با نرخ بهرهٔ بدون ریسک و دارایی ریسکی تعیین می‌شود. تأثیر دارایی ریسکی بر درآمد کارکنان یک شرکت از آنجا ناشی می‌شود که در اکثر این شرکت‌ها و مراکز صنعتی بزرگ، تغییرات ارزش سهام بر درآمد کارکنان تأثیر مستقیم می‌گذارد. با توجه به این مفروضات دینامیک پرداخت‌های سرمایه‌گذار به طرح بیمه از مدل انتشار زیر با دو عامل حرکت براونی پیروی می‌کند.

$$dc(t)=c(t)\mu_c dt+c(t)\sigma_{cr}\,dW_r(t)+c(t)\sigma_{cs}dW_s(t)$$

که در آن $W_r(t)$ و $W_s(t)$ مستقل از یکدیگرند، $c(0)=c_0$ و μ_c رانش دینامیک درآمد است. همچنین σ_{cr} و σ_{cs} نیز به‌ترتیب همبستگی درآمد با نرخ بهره و همبستگی درآمد با دارایی ریسکی هستند. تمامی پارامترهای معرفی‌شده در دو دینامیک فوق ثابت‌اند. قیمت‌های بازاری ریسک ξ_s و ξ_r را ثابت فرض می‌کنیم تا ویژگی‌های آماری دینامیک‌های ارائه‌شده تحت اندازه‌های P و اندازهٔ مارتینگل معادل Q تغییر نکند. درصورتی‌که نرخ بهره با مدل وسیچک تعیین شود قیمت ورقهٔ قرضهٔ صفر کوپن از روابط زیر و به کمک پارامترهای دینامیک نرخ بهره تعیین می‌شود (Bjork, 2009):

$$B(t,T)=e^{f(t,T)-g(t,T)r(t)}$$

که در آن

$$f(t,T)=\left(\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}-(T-t)\right)\left(b-\frac{\sigma_r\xi_r}{a}-\frac{\sigma_r^{\,2}}{2a^2}\right)-\frac{\sigma_r^{\,2}\left(1-e^{-a(T-t)}\right)^2}{4a^3}$$

و

$$g(t,T)=\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}$$

سبد سرمایه‌گذار در دوران تجمیع سرمایه از یک دارایی بدون ریسک و یک دارایی ریسکی تشکیل شده است. دارایی بدون ریسک ورقهٔ قرضهٔ صفر کوپنی است که زمان باقی‌مانده تا سررسید آن را با مقدار ثابت K نشان می‌دهیم و دینامیک قیمت آن به‌صورت زیر تعیین می‌شود:

$$dB_K(t)=B_K(t)\left(r(t)-\sigma_r\xi_r g(0,K)\right)dt+B_K(t)\left(-\sigma_r g(0,K)\right)dW_r(t)$$

که در آن $r(t)$ نرخ بهره بدون ریسک در زمان t، σ_r تلاطم دینامیک نرخ بهره و ξ_r قیمت بازاری ریسک ورقهٔ قرضه بدون کوپن هستند. دارایی ریسکی را سهام در نظر می‌گیریم. سهام و نرخ بهره بدون ریسک دارای همبستگی هستند، زیرا تغییرات نرخ بهره بدون ریسک در انتخاب سرمایه‌گذاران دربارهٔ سرمایه‌گذاری در بورس یا بانک تأثیر می‌گذارد. در واقع با افزایش نرخ بهره، سرمایه‌گذاران انتظار افزایش بازدهی در بازار بورس را دارند تا ریسکی را توجیه کند که در این بازار متحمل می‌شوند. به‌دلیل وجود این همبستگی برای تعیین دینامیک قیمت دارایی ریسکی از مدل دوعاملی زیر استفاده می‌کنیم:

$$dS(t)=S(t)\left(\xi_r\sigma_{sr}+\xi_s\sigma_s+r(t)\right)dt+S(t)\sigma_{sr}dW_r(t)+S(t)\sigma_s dW_s(t)$$

که در آن علاوه‌بر پارامترهای $B_K(t)$، ξ_s قیمت بازاری ریسک سهام را نشان می‌دهد. همچنین σ_{sr} و σ_s نیز به‌ترتیب بیانگر همبستگی بین نرخ بهره و قیمت سهام و تلاطم قیمت سهام هستند.

جواب صریح مسئلهٔ کنترل بهینهٔ تصادفی

با استفاده از دینامیک‌های ارائه‌شده در بخش قبل برای تعریف فضای حالت بازار مالی و دارایی‌های موجود در سبد سرمایه‌گذار جواب مسئلهٔ کنترل بهینهٔ تصادفی متناظر را که در رابطهٔ (۱۱) معرفی شد، به دست می‌آوریم. پاسخ بهینهٔ $X^*(T)$ تابعی از $\Phi(t,T)$ است که در حالت خاص مورد بحث دارای توزیع نرمال است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Phi(t,T)=-\left(b+\frac{1}{2}\left(\xi_r^{\,2}+\xi_s^{\,2}\right)\right)(T-t)-\left(r(t)-b\right)\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}$$
$$-\int_t^T\left(\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}\sigma_r+\xi_r\right)dW_r(u)-\int_t^T\xi_s dW_s(u)\,.$$

جواب مسئلهٔ (۷) به‌صورت مقدار بهینهٔ تخصیص اعتبار مالی تجمیع‌شده به هریک از دارایی‌های بدون ریسک و یا ریسکی تعیین می‌شود. اعتبار مالی تجمیع‌شده را می‌توان در دو دارایی مشخص‌شده سرمایه‌گذاری کرد یا به‌صورت نقدی در سبد نگاه داشت. بنا به قضیهٔ ۳، جواب صریح دربارهٔ نحوهٔ تخصیص اعتبار مالی به دارایی‌ها که از حل مسئلهٔ کنترل بهینهٔ تصادفی به دست می‌آید، به‌صورت زیر است:

$$\omega_r^*(t) = -\left(\frac{\sigma_s - \xi_r\sigma_{sr} + 2g(t,T)\sigma_r\sigma_s}{g(0,K)\sigma_r\sigma_s}\right)\times$$
$$\left(\gamma B(t,T) - \int_t^T E_t^{F_s}[c(s,l)]B(t,s)ds - X^*(T)\right)$$
$$+\frac{\gamma g(t,T)B(t,T) - \int_t^T E_t^{F_s}[c(s)]g(t,s)B(t,s)ds}{g(0,K)}$$
$$+c(t)\frac{\sigma_s\sigma_{cr} - \sigma_{sr}\sigma_{cs}}{\sigma_r\sigma_s}\frac{\int_t^T e^{(\mu_c-\sigma_{cr}\xi_r-g(0,K)\sigma_r\sigma_{cr}-\sigma_{cs}\xi_s)(s-t)}B(t,s)ds}{g(0,K)}$$

و

$$\omega_s^*(t) = \frac{\xi_s}{\sigma_s}\left(\gamma B(t,T) - \int_t^T E_t^{F_s}[c(s,l)]B(t,s)ds - X^*(T)\right)$$
$$-c(t)\frac{\sigma_{cs}}{\sigma_s}\int_t^T e^{(\mu_c-\sigma_{cr}\xi_r-g(0,K)\sigma_r\sigma_{cr}-\sigma_{cs}\xi_s)(s-t)}B(t,s)ds\,,$$

که در آن $\omega_r^*(t)$. مقدار بهینهٔ تخصیص اعتبار مالی به دارایی بدون ریسک و $\omega_s^*(t)$ مقدار بهینهٔ تخصیص اعتبار مالی به دارایی ریسکی در هر زمان t است. در بخش بعد با تعیین پارامترهای دینامیک‌های معرفی‌شده و جای‌گذاری آن‌ها در روابط به‌دست‌آمده برای جواب مسئلهٔ کنترل بهینهٔ تصادفی، این مسئله را در چهارچوب داده‌های تاریخی بازار مالی ایران بررسی می‌کنیم.

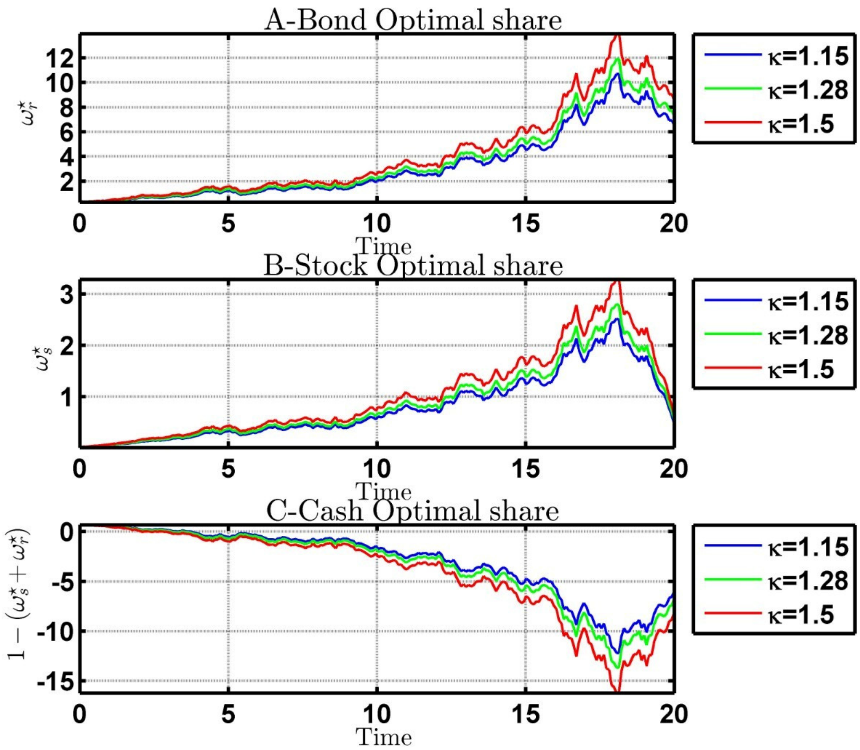
نتایج و بحث

در این بخش داده‌های تاریخی ایران در بازهٔ زمانی ۸ ساله از ۱۳۹۴/۸/۱۳ تا ۱۴۰۲/۸/۱۳ را بررسی می‌کنیم. در این مقاله برای برآورد پارامترهای دینامیک نرخ بهره، سهام و ورقهٔ قرضه به‌ترتیب داده‌های تاریخی نرخ بهره بدون ریسک ایران، شاخص بورس ایران (IREX)و اوراق قرضهٔ بدون کوپن (اخزا) را به کار می‌بریم. همچنین برای تعیین پارامترهای دینامیک پرداختی‌های سرمایه‌گذار از میانگین درآمد سالانهٔ خانوارهای شهری در ایران استفاده می‌کنیم. پارامترهای دینامیک نرخ بهره را که از مدل وسیچک پیروی می‌کند به روش برآورد بیشینه درست‌نمایی تخمین می‌زنیم. پارامترهای به‌دست‌آمده در این بخش در جدول ۱ گردآوری شده است.

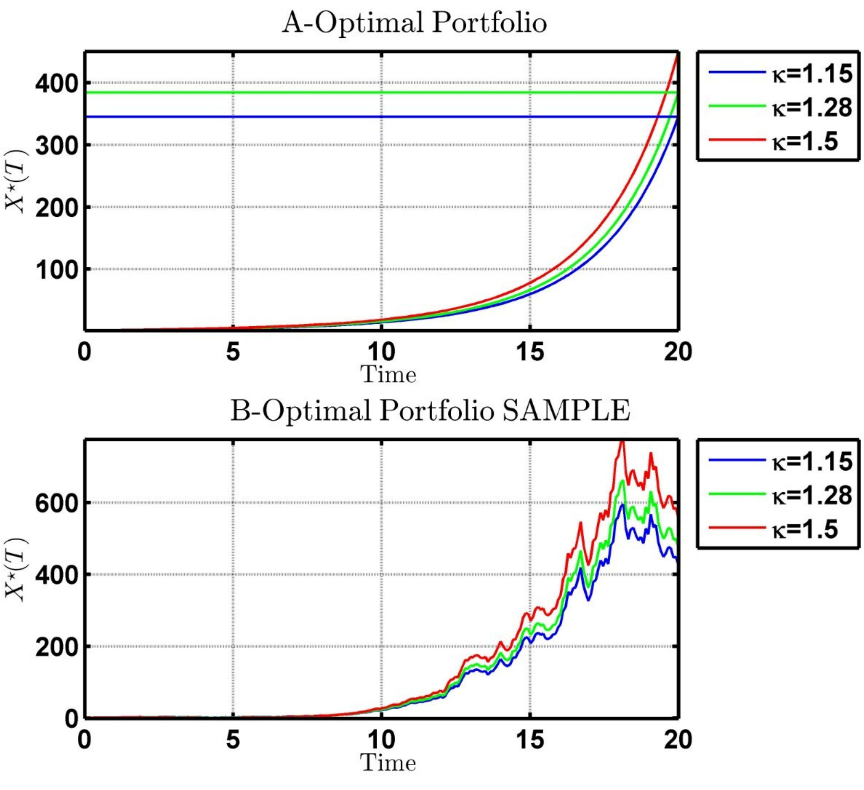
با توجه به پارامترهای جدول ۱ و با استفاده از روابط به‌دست‌آمده برای نحوهٔ تخصیص بهینهٔ اعتبار مالی به هریک از دارایی‌های موجود در سبد، در سه سناریوی متفاوت تحققی از این سبد در دورهٔ تجمیع سرمایه را نمایش می‌دهیم. با توجه به ماهیت تصادفی دارایی‌های موجود در سبد و شرایط حاکم بر بازار مالی، به‌ازای هر تحقق، ارزش سبد بهینه مسیر متفاوتی را می‌پیماید. به‌دنبال مقادیر بهینهٔ به‌دست‌آمده برای تشکیل سبد در زمان t، فارغ از نتیجهٔ سرمایه‌گذاری در پایان دورهٔ تجمیع سرمایه‌گذاری، احتمال رسیدن به هدف ماکزیمم و احتمال ورشکستگی سرمایه‌گذار کمینه خواهد بود. برای ساخت سبدهای سرمایه در طول دورهٔ تجمیع سه استراتژی متفاوت در ارتباط با میزان ریسک‌گریزی سرمایه‌گذار یا به‌طور معادل هدف نهایی وی از سرمایه‌گذاری در نظر می‌گیریم. هریک از استراتژی‌ها با توجه به ضریب κ. در رابطهٔ $\gamma = \chi_T\kappa$ تعیین می‌شوند. سه مقدار متفاوت 1.28 ، 1.15 و 1.5 را برای κ در نظر می‌گیریم. استراتژی اول که در آن $\kappa = 1.15$ استراتژی با ریسک‌گریزی بالا، استراتژی دوم که در آن $\kappa = 1.28$ استراتژی با ریسک‌گریزی متعادل و در نهایت استراتژی سوم که در آن $\kappa = 1.5$، استراتژی با ریسک‌گریزی پایین هستند. سبد بهینهٔ سرمایه‌گذار در دورهٔ تجمیع را در دو افق زمانی ۲۰ و ۳۰ ساله بررسی می‌کنیم. نتایج حاصل از شبیه‌سازی طرح بیمه با مشارکت معین در این دو افق زمانی را در شکل ۱، شکل ۲، شکل ۳ و شکل ۴ نشان می‌دهیم. روند تخصیص بهینهٔ اعتبار مالی به هریک از دارایی‌ها در طول دورهٔ تجمیع به‌گونه‌ای است که در سال‌های ابتدایی به استقبال ریسک می‌رود. با نزدیک‌تر شدن به زمان سررسید یا پایان دورهٔ تجمیع استراتژی‌های مورد بررسی رفتار ریسک‌گریزی از خود نشان می‌دهند. این رفتار با افزایش درصد پول نقد در سبد بهینه در سال‌های پایانی دورهٔ تجمیع خود را نشان می‌دهد. همچنین در نمودارهای A و B از شکل ۱ مشاهده می‌شود که تخصیص سرمایه به سهام و ورقهٔ قرضه در سال‌های ابتدایی با افزایش مواجه است. هرچه به‌سمت سال‌های پایانی دورهٔ تجمیع پیش می‌رویم درصد تخصیص اعتبار مالی به سهام و ورقهٔ

جدول ۱. پارامترهای برآوردشده از داده‌های تاریخی
Table1. Calibrated parameters from historical data

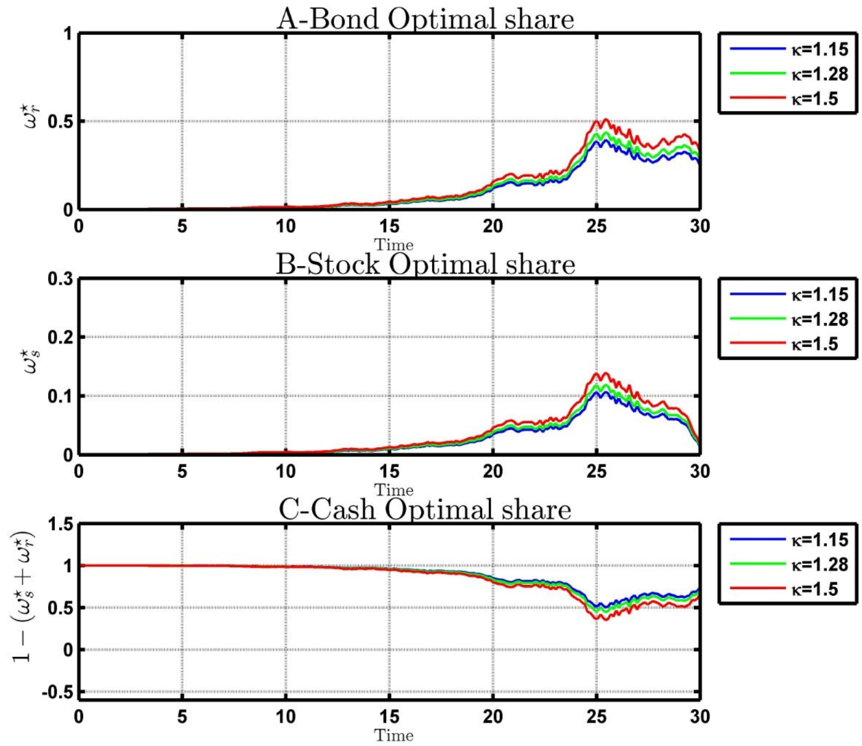
درآمد Income $c(t)$	اعتبار مالی Fund χ_T	ورقهٔ قرضه Bond $B_K(t)$	سهام Stock $S(t)$	نرخ بهرهٔ بدون ریسک Risk free rate of interest $r(t)$
c_0 =0.2332 μ_c =0.4963 σ_{cr} =0.2613 σ_{cs} =0.9160	x_0 =1 T =30,20	K =1.2	σ_s =0.3681 σ_{sr} =0.3007 ξ_s =-0.5724	a =33.9326 b =0.2234 σ_r =4.9087 ξ_r =0.0012



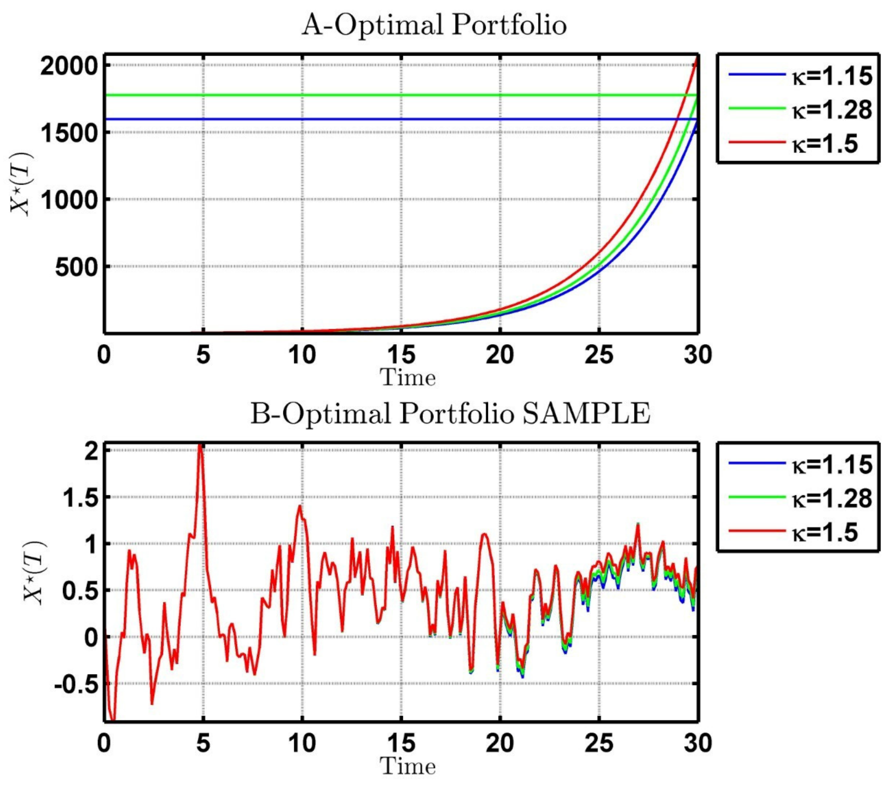
شکل ۱. سهم بهینهٔ تخصیص اعتبار مالی به A: ورقهٔ قرضه، B: سهام و C: ول نقد در طول دورهٔ تجمیع ۲۰ ساله.
Fig 1. Optimal share of fund to A: Bond, B: stock and C: Cash during 20 years accumulation phase.



شکل ۲. A: ارزش سبد بهینهٔ سرمایه‌گذاری در دورهٔ تجمیع، B: یک شبیه‌سازی از ارزش سبد بهینهٔ سرمایه‌گذاری در طول دورهٔ تجمیع ۲۰ ساله.
Fig 2. A: Optimal portfolio value during accumulation phase, B: A simulation of optimal portfolio value during 20 years accumulation phase.



شکل ۳. سهم بهینهٔ تخصیص اعتبار مالی به A: ورقهٔ قرضه، B: سهام و C: پول نقد در طول دورهٔ تجمیع ۳۰ ساله.
Fig 3. Optimal share of fund to A: Bond, B: stock and C: Cash during 30 years accumulation phase.



شکل ۴. A: ارزش سبد بهینهٔ سرمایه‌گذاری در دورهٔ تجمیع، B: شبیه‌سازی از ارزش سبد بهینهٔ سرمایه‌گذاری در طول سال دورهٔ تجمیع ۳۰ ساله.
Fig 4. A: Optimal portfolio value during accumulation phase, B: A simulation of optimal portfolio value during 30 years accumulation phase.

قرضه کاهش چشمگیری می‌یابد و بخش بیشتری از اعتبار مالی به‌صورت نقدی در سبد سرمایهٔ سرمایه‌گذار تجمیع می‌شود (نمودار C شکل ۱). همچنان‌که در شکل ۱ قابل مشاهده است هنگام استفاده از استراتژی‌های ریسک‌پذیرتر، یعنی هنگامی که ضریب κ بزرگ‌تر می‌شود، تخصیص سرمایه به دارایی‌های ریسکی سبد، یعنی سهام و ورقهٔ قرضه بیشتر و به همان نسبت برای دارایی بدون ریسک یا پول نقد کمتر می‌شود. منفی شدن مقدار بهینهٔ تخصیص سرمایه به پول نقد، به‌معنای امکان قرض گرفتن برای سرمایه‌گذار است که از فرض‌های اولیهٔ مسئله به شمار می‌رود.

شکل ۲ نمودار A، سبد بهینهٔ سرمایه‌گذار را نشان می‌دهد که از رابطهٔ (۱۱) به دست آمده است. خطوط عمودی در این نمودار نمایانگر اهداف سرمایه‌گذار یا همان γ در مسئلهٔ هدف‌محور (۷) در پایان دورهٔ تجمیع هستند. نمودار B در همین شکل، سبد بهینهٔ متشکل از وزن‌های بهینه نمایش‌داده‌شده در شکل ۱ را نشان می‌دهد. این سبد بهینه به‌صورت زیر محاسبه شده است:

$$X^*(t) = \left(\omega_r^*(\mathrm{t})B_K(t) + \omega_s^*(\mathrm{t})S(t) + \left(1 - \left(\omega_r^*(\mathrm{t}) + \omega_s^*(\mathrm{t})\right)\right) r(t)\right) c(t)$$

در شکل ۳ سبد بهینهٔ سرمایه‌گذاری در دورهٔ تجمیع اعتبار مالی با افق زمانی ۳۰ ساله را نشان می‌دهد. با افزایش طول دورهٔ تجمیع اعتبار مالی، روند افزایش مقدار بهینه تخصیص اعتبار مالی به دارایی‌های ریسکی کندتر رخ می‌دهد، به‌نحوی که در سال‌های ابتدایی دورهٔ تجمیع درصد زیادی از سبد بهینه را پول نقد تشکیل می‌دهد. با گذر از نیمهٔ دورهٔ تجمیع روند افزایش سرمایه‌گذاری در دارایی‌های ریسکی شدت می‌گیرد. مانند حالت ۲۰ ساله با نزدیک‌تر شدن به پایان دورهٔ تجمیع افزایش ریسک‌گریزی در هر سه استراتژی مورد بررسی به تخصیص درصد بیشتری از اعتبار مالی به پول نقد منجر می‌شود. شدت رشد ریسک‌گریزی در استراتژی‌ها به حدی بالاست که درصد بهینهٔ تخصیص اعتبار مالی به ریسکی‌ترین دارایی سبد، یعنی سهام، در سال‌های آخر به صفر میل می‌کند.

در شکل ۴ نیز مانند شکل ۲ سبد بهینهٔ شبیه‌سازی‌شده در دورهٔ تجمیع را نمایش می‌دهیم. همان‌طور که انتظار داشتیم در این حالت نیز در صورت استفاده از استراتژی ریسک‌پذیرتر ارزش نهایی سبد بهینه در پایان دورهٔ تجمیع از استراتژی‌هایی با ریسک‌گریزی کم بیشتر خواهد بود (شکل ۴ نمودار B).

جمع‌بندی و پیشنهادها

با توجه به نتایج به‌دست‌آمده از سه استراتژی تعریف‌شده در بخش قبل، هرچه ریسک‌گریزی سرمایه‌گذار بیشتر باشد، درصد بیشتری از اعتبار مالی به سرمایه‌گذاری در دارایی‌های بدون ریسک اختصاص می‌یابد. کاهش ریسک‌گریزی افزایش سرمایه‌گذاری در سهام در طول دوره تجمیع را به‌دنبال دارد. این افزایش به بهبود ارزش سبد بهینه در پایان دورهٔ تجمیع منجر می‌شود، اما می‌تواند احتمال ورشکستگی سرمایه‌گذار را نیز افزایش دهد. بنابراین نتیجه می‌گیریم که استراتژی با ریسک‌گریزی متعادل بهترین استراتژی سرمایه‌گذاری برای درصد بالایی از سرمایه‌گذاران است. این استراتژی با تأکید متوازن بر استفاده از فرصت‌های پذیرش ریسک و حفظ حداقل سرمایهٔ تجمیع‌شده، هر دو هدف افزایش اعتبار مالی تجمیع‌شده و کاهش احتمال ورشکستگی را دربرمی‌گیرد. با توجه به اهمیت تغییر طرح‌های بیمه در کشورهای در حال پیشرفت، گسترش این طرح‌ها در ایران نیز ناگزیر خواهد بود. با افزایش پژوهش‌ها در ارتباط با چگونگی استفاده از این طرح‌ها و استفاده از یافته‌های روز دنیا مطابق با شرایط بازار مالی ایران، می‌توان در توسعهٔ صنعت بیمهٔ کشور نقش مهمی ایفا کرد.

مشارکت نویسندگان

نویده مدرسی: طراحی و توسعهٔ مسئله، کمک در تدوین و بررسی محتوای کیفی و تحلیل داده‌ها؛ پارسا یحیوی: ارائهٔ راه‌حل، تدوین و نگارش مقاله، ارائهٔ الگوریتم‌های محاسباتی، نوشتن کدهای برنامه و تحلیل داده‌ها.

تشکر و قدردانی

نویسندگان از داوران محترم مقاله که با پیشنهادهای ارزنده باعث بهبود مقاله شدند، قدردانی و سپاسگزاری می‌کنند.

تعارض منافع

نویسندگان اعلام می‌کنند که هیچ تضاد منافعی در خصوص انتشار تحقیق ثبت‌شده وجود ندارد. علاوه‌براین، موارد اخلاقی از جمله سرقت ادبی، رضایت آگاهانه، رفتار نادرست، جعل و/یا جعل داده‌ها، انتشار مضاعف و یا سوءرفتار به‌طور کامل ازسوی نویسندگان رعایت شده است.

منابع

Anthropelos, M.; Blontzou, E., (2023). On valuation and investments of pension plans in discrete incomplete markets. Risks, 11(6): 103-135 **(33 pages).**

Bjork, T., (2009). Arbitrage theory in continuous time. Oxford University Press.

Blake, D.; Wrigth, D.; Zhang, Y., (2013). Target-driven investing: Optimal investment strategies in defined contribution pension plans under loss aversion. J. Econ. Dyn. Control, 37: 195–209 **(15 pages).**

Chang, H.; Li, J.; Zhao, H., (2022). Robust optimal strategies of DC pension plans with stochastic volatility and stochastic income under mean-variance criteria. J. Ind. Manage. Optim. 18(2): 1393-1423 **(31 pages).**

Chen, Z.; Li, Z.; Zeng, Y.; Sun, J., (2017). Asset allocation under loss aversion and minimum performance constraint in a DC pension plan with inflation risk. Insur. Math. Econ., 75: 137–150 **(14 pages).**

Dindar Kaleh Sar, Y.; Dashtbany, Y., (2022). Designing an optimal investment model for the Armed Forces Pension Fund in the Islamic Republic of Iran's financial markets. Interdiscip. Stud, Strategic Knowl., 6(22): 73-102 **(30 pages).** [In Persian]

Dong, Y.; Zheng, H., (2019). Optimal investment of DC pension plan under short-selling constraints and portfolio insurance. Insur. Math. Econ., 85(4): 47-59 **(13 pages).**

Dong, Y.; Lv, W.; Wei, S.; Gong, Y., (2020). Optimal investment of DC pension plan under incentive schemes and loss aversion. Math. Probl. Eng., 5145848.

Donnelly, C.; Khemka, G.; Lim, W., (2022). Investing for retirement: Terminal wealth constraints or a desired wealth target? Eur. Financ. Manage., 28(5): 1283-1307 **(25 pages).**

Eling, M.; Loperfido, N., (2020). New mathematical and statistical methods for actuarial science and finance. Eur. J. Finance, 26 (2-3): 96-99 **(4 pages).**

Farrell, J.; Shoag, D., (2015). Asset management in public DB and non-DB Pension Plans. J. Pension Econ. Finance, 15(4): 379–406 **(34 pages).**

Ferreira Morici, H.; Vigna, E., (2024). Optimal additional voluntary contribution in DC pension schemes to manage inadequacy risk. Decisions. Econ. Finance., 1-33 **(33 pages).**

Forsyth P.A.; Vetzal K.R., (2019). Defined Contribution Pension Plans: Who Has Seen the Risk? J. Risk Financ. Manage., 12(2): **70**.

Guan, G.; Liang, Z., (2014). Mean-variance efficiency of DC pension plan under stochastic interest rate and mean-reverting returns. Insur. Math. Econ., 61: 99–109 **(11 pages).**

Guan, G.; Liang, Z., (2016). Optimal management of DC pension plan under loss aversion and Value-at-Risk constraints. Insur. Math. Econ., 69: 224–237 **(14 pages).**

Ilmanen, A.; Kabiller, D. G.; Siegel, L. B.; Sullivan, R. N., (2017). Defined contribution retirement plans should look and feel more like defined benefit plans. J. Portfolio Manage., 43(2): 61-76 **(16 pages).**

Keganneng, O.; Basimanebotlhe, O., (2022). Optimal control of assets allocation on a defined contribution pension plan. Open Access Lib. J., 9: 1-17 **(17 pages).**

Lukovic, S.; Savićević, M., (2021). The decline of defined benefit pension plans in developed countries. Econ., 67(3): 19-37 **(19 pages).**

Menoncin, F.; Vigna, E., (2017). Mean–variance target-based optimization for defined contribution pension schemes in a stochastic framework. Insur. Math. Econ., 76: 172-184 **(13 pages).**

Merton, R. C., (2014). The Crisis in retirement planning. Harvard Bus. Rev.92, nos. 7/8: 43–50 **(8 pages).**

nadiri, M.; khani, A., (2022). Investor sentiment and mean-variance relationship in Tehran stock exchange. Financ. Manage. Perspect. 12(38): 131–160 **(30 pages).** [In Persian]

Peymany, M.; Amiri, M.; Sokout, S.M., (2023). Option pricing using stochastic interest rate in Tehran stock exchange. Financ. Manage. Perspect. 13(41): 91–115 **(25 pages).** [In Persian]

Vahabi, S.; Payandeh Najafabadi, A., (2023). Investment portfolio optimization for a dynamic life insurance product by using stochastic control tools. Iran. J. Insur. Res., 12(3): 225-238 **(14 pages).** [In Persian]

Vigna, E., (2012). On efficiency of mean-variance based portfolio selection in DC pension schemes. Quant. Finance, 14: 237–258 **(22 pages).**

Wiafe, O.K.; Basu, A.K.; Chen, E.T., (2020). Portfolio choice after retirement: Should self-annuitisation strategies hold more equities?. Econ. Anal. Policy, 65: 241–255 **(15 pages).**

Zare zade, R.; Ghousi, R.; Mohammadi, E.; ghanbari, H., (2024). Portfolio optimization for insurance companies under different scenarios (A case study of Tehran stock exchange). Iran. J. Insur. Res., 13(3): 241-254 **(14 pages).** [In Persian]

Zhou, X.; Li, D., (2000). Continuous-time mean-variance portfolio selection: A stochastic LQ framework. Appl. Math. Optim. 42: 19–33 **(15 pages).**

Zobeiri, H.; Motameni, M., (2020). Inflation hedging in defined contribution pension plan by investing in Tehran stock-exchange. Jemr, 11 (40): 67-98 **(32 pages).** [In Persian]

AUTHOR(S) BIOSKETCHES	معرفی نویسندگان

نویده مدرسی، استادیار گروه ریاضی، دانشکده آمار، ریاضی و رایانه، دانشگاه علامه طباطبائی، تهران، ایران

- Email: *n.modarresi@atu.ac.ir*
- ORCID: 0000-0003-0229-2011
- Homepage: https://aris.atu.ac.ir/n.modarresi

پارسا یحیوی، دانشجوی دکتری گروه ریاضی، دانشکده آمار، ریاضی و رایانه، دانشگاه علامه طباطبائی، تهران، ایران

- Email: *p_yahyavi@atu.ac.ir*
- ORCID: 0009-0005-3248-8957
- Homepage: https://mcs.atu.ac.ir/fa

HOW TO CITE THIS ARTICLE

Modarresi, N.; Yahyavi, P., (2025). Optimal portfolio in defined contribution pension plans with target-based mean–variance approach.Iran. J. Insur. Res., 14(2): 95-108.

DOI: 10.22056/ijir.2025.02.01

URL: https://ijir.irc.ac.ir/article_160336.html