Iran. J. Insur. Res., 12(4): 283-298, Autumn 2023, Serial #46

Iranian Journal of Insurance Research
(IJIR)

Homepage: https://ijir.irc.ac.ir/?lang=en

Iranian Insurance Research Center (IIRC)

ORIGINAL RESEARCH PAPER

Modeling outstanding claims in dependent run-off triangles considering calendar dependence

A. Shakouri[1], M. Izadi[1,*], B.E. Khaledi[2]

[1] *Department of Statistics, Faculty of Science, Razi University, Kermanshah, Iran*

[2] *Department of Applied Statistics and Research Methods, University of Northern Colorado, Greeley, Colorado, USA*

ARTICLE INFO

Article History:
Received 14 February 2023
Revised 16 May 2023
Accepted 04 June 2023

Keywords:
Analysis of covariance
Analysis of variance
Bayesian method
Gaussian copula
Outstanding claim

*Corresponding Author:
Email: *m.izadi@razi.ac.ir*
Phone: +9883 34274561
ORCID: 0000-0001-6725-3449

ABSTRACT

BACKGROUND AND OBJECTIVES: Vital for the insurer's profitability and solvency, a loss reserve is a prediction of the amount an insurer will need to pay for future claims. Researchers have been exploring methods to incorporate dependencies among multiple loss triangles to improve the accuracy of outstanding claim prediction. This study aims to predict outstanding claims in dependent run-off triangles by considering the dependence among the outstanding claims paid in each run-off triangle.

METHODS: The study considers the dependence among corresponding outstanding claims in run-off triangles related to different lines of insurance. It also takes into account the calendar year of payment of claims, in addition to factors such as the year of claim occurrence and the number of years of delay in payment. Two methods are used to model the inter-triangular and intra-triangular dependencies. The first method involves modeling the dependence among triangles by using a multivariate distribution for outstanding claims in the corresponding cells of run-off triangles. The calendar dependence within each run-off triangle is incorporated by adding a calendar year effect factor to the mean of the outstanding claims distribution. The second method uses a multivariate distribution for the outstanding claims of the calendar years corresponding to run-off triangles, capturing both types of dependence. Bayesian approach and Hamiltonian Monte-Carlo sampling methods are employed to estimate model parameters.

FINDINGS: The study utilizes data from an Iranian insurance company on outstanding claims in car body insurance and third-party car insurance from 2012 to 2015. The two methods of calendar dependence modeling are compared using a scale mixture multivariate distribution with normal marginal distributions and copula dependence. The mean absolute percentage error is used to measure the accuracy of the prediction. The results show that using a multivariate distribution for calendar dependence modeling leads to a more accurate prediction compared to adding the calendar year effect factor to the mean model.

CONCLUSION: Based on the findings, it is concluded that modeling the calendar dependence among outstanding claims in run-off triangles using a multivariate distribution improves the accuracy of reserves prediction compared to using the calendar year effect factor. This approach can enhance the prediction of outstanding claims and contribute to the insurer's profitability and solvency.

DOI: 10.22056/ijir.2023.04.03

نشریه علمی پژوهشنامه بیمه

سایت نشریه: https://ijir.irc.ac.ir/?lang=fa

مقاله علمی

مدل‌بندی خسارت‌های معوق در مثلث‌های تأخیر وابسته با در نظر گرفتن وابستگی تقویمی

افروز شکوری[۱]؛ محی‌الدین ایزدی[۱،*]؛ بهاءالدین خالدی[۲]

[۱] گروه آمار، دانشکده علوم، دانشگاه رازی، کرمانشاه، ایران

[۲] گروه آمار کاربردی و روش‌های تحقیق، دانشگاه کلرداوی شمالی، گریلی، کلرادو، آمریکا

اطلاعات مقاله

تاریخ های مقاله:

تاریخ دریافت: ۲۵ بهمن ۱۴۰۱

تاریخ داوری: ۲۶ اردیبهشت ۱۴۰۲

تاریخ پذیرش: ۱۴ خرداد ۱۴۰۲

کلمات کلیدی:

تحلیل کواریانس

تحلیل واریانس

خسارت معوق

روش بیزی

مفصل گاوسی

نویسنده مسئول:*

ایمیل: m.izadi@razi.ac.ir

تلفن: ۳۴۲۷۴۵۶۱ ۹۸۸۳+

ORCID: 0000-0001-6725-3449

چکیده:

پیشینه و اهداف: ذخیرۀ خسارت که برای سودآوری و پرداخت بدهی بیمه‌گر حیاتی است، پیش‌بینی مبلغی است که بیمه‌گر باید برای خسارت‌های آینده بپردازد. در سال‌های اخیر، بسیاری از پژوهشگران وابستگی‌های بین چند مثلث تأخیر را برای تعیین ذخایر زیان در نظر گرفته‌اند. هدف اصلی این مقاله پیش‌بینی خسارت‌های معوق در مثلث‌های تأخیر وابسته با استفاده از مدل‌های تصادفی است که در آن‌ها وابستگی بین مثلث‌ها و وابستگی بین خسارت‌های معوق پرداختی در یک سال تقویمی در هر مثلث تأخیر در نظر گرفته می‌شود.

روش‌شناسی: استفاده از وابستگی بین خسارت‌های معوق متناظر در مثلث‌های تأخیر مربوط به چند رشتۀ بیمه‌ای ممکن است در افزایش دقت پیش‌بینی خسارت‌های معوق تأثیرگذار باشد. همچنین، در یک مثلث تأخیر مربوط به یک رشتۀ بیمه‌ای، علاوه‌بر عوامل سال وقوع خسارت و تعداد سال‌های تأخیر پرداخت خسارت معوق، سال تقویمی پرداخت خسارت هم می‌تواند در میزان پرداخت خسارت برای سال‌های وقوع خسارت متفاوت تأثیرگذار باشد. بنابراین در نظر گرفتن وابستگی تقویمی بین خسارت‌هایی که در یک سال تقویمی پرداخت می‌شوند، می‌تواند دقت پیش‌بینی در مثلث‌های تأخیر را بهبود بخشد. بنابراین، در مدل‌بندی توأم خسارت‌های معوق چند مثلث تأخیر، دو نوع وابستگی بین‌مثلثی و درون‌مثلثی وجود دارد. در این مقاله، از دو روش برای مدل‌بندی این دو نوع وابستگی استفاده می‌شود. در روش نخست، با در نظر گرفتن توزیع چندمتغیره برای خسارت‌های معوق در سلول‌های متناظر مثلث‌های تأخیر، وابستگی بین مثلث‌ها مدل‌بندی می‌شود. در این روش، وابستگی تقویمی بین خسارت‌های معوق در هر مثلث تأخیر با استفاده از اضافه کردن عامل اثر سال تقویمی در مدل میانگین توزیع خسارت‌های معوق در نظر گرفته می‌شود. در روش دوم، یک توزیع چندمتغیره برای خسارت‌های معوق پرداختی سال‌های تقویمی متناظر مثلث‌های تأخیر در نظر گرفته می‌شود که در این صورت هر دو نوع وابستگی با استفاده از توزیع چندمتغیره مدل‌بندی می‌شود. برای برآورد پارامترهای مدل، در هر دو روش، از رهیافت بیزی و روش نمونه‌گیری مونت– کارلوی همیلتونی استفاده می‌شود.

یافته‌ها: در این مقاله، داده‌های خسارت‌های معوق در دو رشتۀ بیمۀ بدنه و بیمۀ شخص ثالث اتومبیل یک شرکت بیمۀ ایرانی در بازۀ سال‌های ۱۳۹۲ تا ۱۳۹۵ که به‌صورت فصلی ثبت شده است، استفاده می‌شود. با استفاده از توزیع آمیخته– مقیاس چندمتغیره با توزیع‌های حاشیه‌ای نرمال و وابستگی مفصلی، دو روش مدل‌بندی وابستگی تقویمی مقایسه می‌شوند. برای این منظور، از معیار میانگین قدرمطلق خطای درصدی برای اندازه‌گیری دقت پیش‌بینی دو روش استفاده می‌شود. برای داده‌های مورد استفاده، مشاهده می‌شود که میانگین قدرمطلق خطای درصدی استفاده از توزیع چندمتغیره برای مدل‌بندی وابستگی تقویمی کمتر است از زمانی که از عامل اثر سال تقویمی در مدل میانگین توزیع خسارت‌های معوق استفاده شود.

نتیجه‌گیری: با توجه به یافته‌های به‌دست‌آمده با استفاده از داده‌های یک شرکت بیمۀ ایرانی، نتیجه می‌گیریم که مدل‌بندی وابستگی تقویمی بین خسارت‌های معوق در مثلث‌های تأخیر با استفاده از توزیع چندمتغیره به پیش‌بینی دقیق‌تر ذخایر مربوط به خسارت‌های معوق نسبت به استفاده از عامل اثر سال تقویمی در مدل میانگین توزیع خسارت‌های معوق منجر می‌شود.

DOI: 10.22056/ijir.2023.04.03

توجه: مدت‌زمان بحث و انتقاد برای این مقاله تا ۱ ژوئیه ۲۰۲۳ در وب‌سایت IJIR در «نمایش مقاله» باز است.

مقدمه

یک شرکت بیمه براساس بیمه‌نامۀ منعقدشده متعهد است در صورت بروز خسارت، مطالبات بیمه‌گذار را پرداخت کند. در بسیاری از موارد ادعاهای مربوط به یک سال خاص اغلب در همان سال تسویه نمی‌شود، بلکه با تأخیر در سال‌های آینده پرداخت می‌شود. در پرونده‌های ادعای خسارت برای برخی رشته‌های بیمه‌ای زمان زیادی بین وقوع خسارت، گزارش و تسویۀ آن فاصله می‌افتد. در این وضعیت، بیمه‌گر نمی‌داند که مبلغ دقیق مجموع خسارت‌های مربوط به بیمه‌نامه‌های صادرشده در سال مبدأ (سال وقوع خسارت) که باید در سال‌های آتی پرداخت کند، چه میزان است. در پایان هر سال مالی، بیمه‌گر باید برآورد دقیقی از تعهدات آینده داشته باشد که بخشی از این تعهدات مربوط به خسارت‌های معوق است. خسارت‌های معوق شامل خسارت‌هایی است که شرکت‌های بیمه در پایان سال مالی پرداخت نکرده‌اند و به‌عنوان بدهی بیمه‌گر به سال‌های بعد منتقل می‌شوند. ازاین‌رو، شرکت بیمه لازم است مبلغی برای خسارت‌های ذکرشده به‌عنوان ذخیره در نظر بگیرد. خسارت‌های معوق شامل دو بخش‌اند. بخشی از این خسارت‌ها مربوط به خسارت‌هایی است که اتفاق افتاده، اما هنوز گزارش داده نشده‌اند، زیرا ممکن است در گزارش خسارت‌ها تأخیر به‌وجود آید. بخش دیگر مربوط به خسارت‌هایی است که گزارش داده شده‌اند، ولی هنوز پرداخت نشده‌اند، زیرا ممکن است بعد از گزارش خسارت‌ها مدتی طول بکشد تا خسارت پرداخت شود. به‌طور مثال، یکی از دلایل به وجود آمدن تأخیر در گزارش خسارت‌هایی که اتفاق افتاده‌اند، طولانی شدن فرایند قضایی و فرایند ارزیابی مقدار خسارت است. معوقات به‌طور کلی نشان‌دهندۀ میزان بدهی و بزرگ‌ترین منبع عدم اطمینان مالی در شرکت‌های بیمه است. بنابراین پیش‌بینی دقیق آن اهمیت زیادی دارد، زیرا اگر کم برآورد شود، سبب می‌شود که شرکت بیمه نتواند تعهدات خود را به‌طور کامل انجام دهد و ممکن است سبب ورشکستگی آن شود و اگر زیاد برآورد شود سبب می‌شود که شرکت بیمه به‌صورت غیرلازم سرمایۀ اضافی نگه دارد.

یک سبد بیمه‌ای شامل L رشتۀ بیمه‌ای را در نظر بگیرید و فرض کنید $X_{i,j}^{(l)}$ مقدار خسارت مربوط به lامین رشته باشد که در سال مبدأ $i\in\{1,\dots,n\}$ اتفاق افتاده و با $j-1\in\{0,\dots,n-1\}$ سال تأخیر پرداخت شده است. جدول ۱ که به‌عنوان مثلث تأخیر شناخته می‌شود، نمایشی از خسارت‌های رشتۀ lام است که در آن سطر نشان‌دهندۀ سال وقوع خسارت و ستون نشان‌دهندۀ سال‌های تأخیر تا پرداخت کامل خسارت است. در این جدول، پرداخت‌های انجام‌شده در یک سال تقویمی در قطرهای فرعی جدول قرار دارند. به‌طور مثال، پرداختی‌های مربوط به سال تقویمی iام عبارت‌اند از:

$$X_{i,1}\ ,X_{i-1,2}\ ,\dots,X_{1,i}\ ,$$

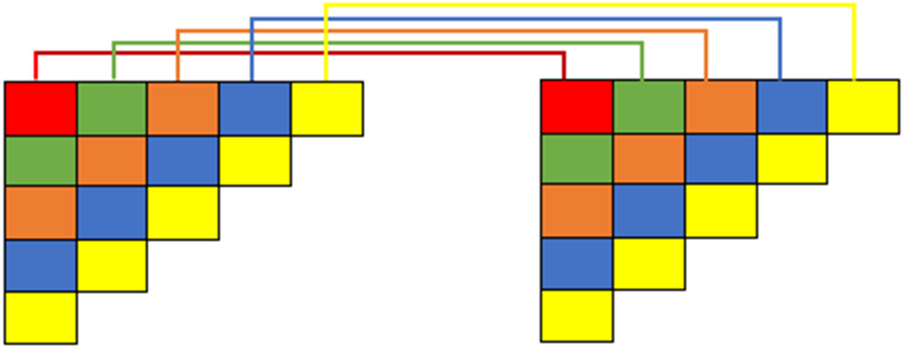
در مثلث تأخیر، با استفاده از خسارت‌های معوق پرداخت‌شدۀ مثلث بالایی، خسارت‌های معوق پرداخت‌نشده در مثلث پایینی که مشاهده نشده‌اند پیش‌بینی می‌شوند. مجموع مقادیر پیش‌بینی‌شدۀ خسارت‌های معوق در مثلث پایینی، کل ذخیرۀ مورد نیاز شرکت بیمه است.

معمولاً شرکت‌های بیمه در چند رشتۀ بیمه‌ای فعالیت دارند که با مسئلۀ پیش‌بینی ذخایر مورد نیاز برای آن‌ها مواجه‌اند. میزان خسارت‌ها در برخی رشته‌های بیمه‌ای به هم وابسته‌اند، بنابراین استفاده از این وابستگی در مدل‌بندی توأم مثلث‌های تأخیر می‌تواند در پیش‌بینی دقیق‌تر ذخایر مؤثر باشد. همچنین، به دلایلی مانند تصمیمات مدیریتی اتخاذشده در یک سال، پرداخت خسارت‌های معوق در آن سال مربوط به قراردادهایی با سال‌های مبدأ متفاوت وابسته‌اند. بنابراین لحاظ کردن این نوع وابستگی نیز می‌تواند در افزایش دقت پیش‌بینی خسارت‌های معوق تأثیرگذار باشد. در این مقاله، علاوه‌بر وابستگی بین خسارت‌های دو مثلث تأخیر، وابستگی بین خسارت‌های معوق پرداختی در یک سال تقویمی با سال‌های مبدأ متفاوت در نظر گرفته می‌شود و این وابستگی‌ها با استفاده از تابع مفصل و توزیع چندمتغیره معرفی‌شده در Shakoori *et al.* (2002) مدل‌بندی می‌شوند. مدل معرفی‌شده روی داده‌های مربوط به دو رشتۀ بیمه‌ای یک شرکت بیمۀ ایرانی پیاده‌سازی شده و نشان داده می‌شود مدل‌بندی توأم این وابستگی‌ها با استفاده از توزیع چندمتغیره می‌تواند باعث افزایش دقت پیش‌بینی خسارت‌های معوق نسبت به حالتی شود که وابستگی بین دو مثلث با توزیع چندمتغیره مدل‌بندی و وابستگی بین خسارت‌های معوق پرداختی در یک سال تقویمی به‌وسیلۀ اضافه کردن اثر آن سال در تابع میانگین (مؤلفۀ سیستماتیک) لحاظ شود. مقایسۀ روش‌های مدل‌بندی وابستگی، براساس معیار میانگین

جدول ۱: مثلث تأخیر مربوط به رشتۀ بیمه‌ای lام

Table 1: Run-off triangle of the lth sub-portfolio insurance

		سال تأخیر (Development year)				
		1	2	⋯	$n-1$	n
سال مبدأ (Accident year)	1	$X_{1,1}^{(l)}$	$X_{1,2}^{(l)}$	⋯	$X_{1,n-1}^{(l)}$	$X_{1,n}^{(l)}$
	2	$X_{2,1}^{(l)}$	$X_{2,2}^{(l)}$	⋯	$X_{2,n-1}^{(l)}$	
	⋮	⋮	⋮	⋯		
	$n-1$	$X_{n-1,1}^{(l)}$	$X_{n-1,2}^{(l)}$	خسارت‌هایی که باید پیش‌بینی شوند (Outstanding claims to be predicted)		
	n	$X_{n,1}^{(l)}$				



شکل ۱: وابستگی خسارت‌های معوق پرداختی درون قطرهای دو مثلث تأخیر و همچنین بین دو مثلث تأخیر
Figure 1: Dependence of outstanding claims within the diagonals of two run-off triangles and also between two run-off triangles

قدرمطلق خطای درصدی (MAPE) انجام می‌شود که دقت پیش‌بینی یک مدل را اندازه‌گیری می‌کند. برای برآورد پارامترهای مدل، از رهیافت بیزی و روش نمونه‌گیری مونت _کارلوی همیلتونی ((HMC) Hamiltonian Monte-Carlo) از توزیع‌های پسین پارامترها استفاده می‌شود. روش HMC یک الگوریتم تولید نمونه از توزیع هدف است که نسبت به روش‌های دیگر مانند متروپولیس و گیبس کارایی بیشتری دارد (Betancourt, 2107; Gelman *et al.*, 2013). برای اجرای الگوریتم HMC، از بستهٔ نرم‌افزاری rstan در نرم‌افزار R استفاده می‌شود.

ساختار مقاله در ادامه بدین صورت است که ابتدا مبانی نظری پژوهش ارائه می‌شود. سپس مروری بر پیشینهٔ پژوهش و روش‌شناسی پژوهش توضیح داده می‌شود. با استفاده از داده‌های دو مثلث تأخیر مربوط به دو رشتهٔ بیمه‌ای یک شرکت بیمهٔ ایرانی، نتایج به‌دست‌آمده مورد بحث قرار می‌گیرد. در پایان، نتیجه‌گیری و جمع‌بندی مباحث ارائه می‌شود.

مبانی نظری پژوهش

همچنان‌که پیش‌تر بیان شد، در وابستگی زوجی بین دو مثلث تأخیر، خسارت‌های معوق در خانه‌های متناظر دو مثلث تأخیر وابسته در نظر گرفته می‌شود و از توزیع توأم دومتغیره برای مدل‌بندی توزیع توأم آن‌ها استفاده می‌شود. Shakoori *et al.* (2022) با در نظر گرفتن وابستگی زوجی بین دو مثلث، وابستگی بین خسارت‌های معوق پرداختی در هر سال تقویمی (قطرهای فرعی مثلث) را با استفاده از اضافه کردن اثر سال تقویمی در تابع میانگین مدل‌بندی کردند. آن‌ها از توزیع SMMNC دومتغیره با مفصل‌های ارشمیدسی گامبل، فرانک و کلایتن و مفصل گاوسی برای مدل‌بندی توزیع توأم خسارت‌های معوق در حالت وابستگی زوجی استفاده کردند. در این مقاله، به‌جای استفاده از اثر سال تقویمی در تابع میانگین، وابستگی بین خسارت‌های معوق در یک سال تقویمی در هر مثلث تأخیر استفاده و همچنین بین دو مثلث تأخیر را با یک توزیع چندمتغیره SMMNC مدل‌بندی می‌کنیم. در واقع در این رویکرد، به‌جای خانه‌های متناظر در دو مثلث تأخیر، قطرهای فرعی متناظر در دو مثلث تاخیر وابسته در نظر گرفته می‌شوند که به آن مدل وابستگی تقویمی می‌گوییم (شکل ۱). به‌طور مثال، در سال تقویمی چهارم (قطر فرعی چهارم به رنگ آبی) هریک از دو مثلث تأخیر شکل ۱، ۴ پرداخت خسارت‌های معوق و در دو مثلث تأخیر ۸ پرداخت خسارت‌های معوق وجود دارد. در این رویکرد، از توزیع ۸متغیره SMMNC با مفصل گاوسی برای مدل‌بندی توزیع توأم ۸ پرداخت خسارت معوق استفاده می‌شود. به‌طور مشابه، برای سال‌های تقویمی اول، دوم، سوم و پنجم به‌ترتیب از توزیع‌های دو، چهار، شش و ده‌متغیره SMMNC با مفصل گاوسی استفاده می‌کنیم.

مدل‌بندی توأم خسارت‌های معوق

در این مقاله از توزیع SMMNC با مفصل گاوسی برای مدل‌بندی توأم دو مثلث تأخیر با وابستگی تقویمی و وابستگی زوجی استفاده می‌شود. بنابراین، در ادامه تابع مفصل توضیح داده می‌شود. سپس توزیع SMMNC معرفی و مدل‌بندی خسارت‌های معوق دو مثلث تأخیر با استفاده از این توزیع شرح داده می‌شود.

مفصل یک تابع توزیع تجمعی توأم است که توزیع‌های حاشیه‌ای آن توزیع یکنواخت استاندارد است. به‌عبارت‌دیگر، $C:[0,1]^L \rightarrow [0,1]$ یک مفصل L متغیره است، هرگاه یک تابع توزیع تجمعی توأم L متغیره با تابع توزیع‌های حاشیه‌ای یکنواخت استاندارد باشد. اکنون، فرض کنید $X_1,\ldots,X_L$ متغیرهای تصادفی پیوسته، به‌ترتیب، با تابع توزیع‌های حاشیه‌ای $F_1,\ldots,F_L$، تابع چگالی‌های $f_1,\ldots,f_L$ و تابع توزیع تجمعی توأم F باشند. Sklar (1959) نشان داد که مفصل یکتای C وجود دارد، به‌گونه‌ای که:

$$F\left(x_1,\ldots,x_l\right) = C\left(F_1\left(x_1\right),\ldots,F_L\left(x_L\right);\theta\right), \quad \forall\left(x_1,\ldots,x_L\right) \in R^L \qquad (۱)$$

که در آن θ پارامتر وابستگی مفصل C است. با مشتق‌گیری از

رابطهٔ (۱)، تابع چگالی توأم به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$f\left(x_1,\dots,x_L\right)=c\left(F_1\left(x_1\right),\dots,F_L\left(x_L\right);\theta\right)\prod_{i=1}^{L}f_i\left(x_i\right)$$

که در آن به

$$c\left(u_1,\dots,u_L;\theta\right)=\frac{\partial^L C\left(u_1,\dots,u_L;\theta\right)}{\partial u_1\dots\partial u_L}$$

تابع چگالی مفصل گفته می‌شود.

مفصل گاوسی یکی از مفصل‌های رایج و پرکاربرد برای مدل‌بندی وابستگی بین متغیرهای تصادفی است که در این مقاله به کار می‌رود. مفصل C_G را گاوسی گویند، هرگاه

$$C_G\left(u_1,\dots,u_L;R\right)=\Phi_R\left(\Phi^{-1}\left(u_1\right),\dots,\Phi^{-1}\left(u_L\right)\right) \qquad (۲)$$

که در آن Φ_R تابع توزیع تجمعی نرمال چندمتغیره با بردار میانگین 0 و ماتریس همبستگی R و Φ و Φ^{-1} به‌ترتیب تابع توزیع تجمعی و تابع چندکی توزیع نرمال استاندارد است. با مشتق‌گیری از رابطهٔ (۲)، تابع چگالی مفصل گاوسی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$c_G\left(u_1,\dots,u_L;R\right)=\frac{\partial^L C_G}{\partial u_1\dots\partial u_L}=$$

$$|R|^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\Phi^{-1}\left(u_1\right)\\ \vdots\\ \Phi^{-1}\left(u_L\right)\end{bmatrix}^T\left(R^{-1}-I\right)\begin{bmatrix}\Phi^{-1}\left(u_1\right)\\ \vdots\\ \Phi^{-1}\left(u_L\right)\end{bmatrix}\right)$$

که در آن $\boldsymbol{x}^T$ ترانهادهٔ بردار $\boldsymbol{x}$ است. برای جزئیات بیشتر دربارهٔ انواع مفصل‌ها و ویژگی‌های آن‌ها به Nelsen (2006) و Durante and Sempi (2016) مراجعه کنید.

توزیع SMMNC را Shakoori *et al.* (2022) معرفی کرده است که به این صورت تعریف می‌شود: بردار تصادفی $\left(X_1,\dots,X_L\right)$ دارای توزیع SMMNC است، هرگاه دارای تابع چگالی توأم

$$f\left(x_1,\dots,x_L\right)=\int_0^{\infty}\prod_{i=1}^{L}\phi\left(x_i;\mu_i,k\left(\lambda\right)\sigma_i^2\right)c\left(\Phi\left(x_1;\mu_1,k\left(\lambda\right)\sigma_1^2\right),\dots,\Phi\left(x_L;\mu_L,k\left(\lambda\right)\sigma_L^2\right);\theta\right)dH(\lambda\mid\nu) \qquad (۳)$$

باشد که در آن $\phi\left(.;\mu,\sigma^2\right)$ و $\Phi\left(.;\mu,\sigma^2\right)$ به‌ترتیب تابع چگالی و تابع توزیع تجمعی نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2، $H(.\mid\nu)$ یک تابع توزیع تجمعی و θ پارامتر مفصل C است. در رابطهٔ (۳)، $k\left(\lambda\right)$ یک تابع مثبت از λ است. به‌عبارت‌دیگر، اگر متغیر تصادفی Λ دارای تابع توزیع تجمعی $H(.\mid\nu)$ باشد، آنگاه $\left(X_1,\dots,X_L\right)$ دارای توزیع SMMNC است، هرگاه

$$\left(X_1,\dots,X_L\right)\mid\Lambda=\lambda\sim C\left(\Phi\left(.;\mu_1,k\left(\lambda\right)\sigma_1^2\right),\dots,\Phi\left(.;\mu_L,k\left(\lambda\right)\sigma_L^2\right);\theta\right),\quad \Lambda\sim H\left(.\mid\nu\right).$$

مدل وابستگی زوجی با اثر سال تقویمی

در مطالعات ذخیرهٔ خسارت براساس مثلث‌های تأخیر، معمولاً خسارت‌ها به‌صورت نرمال‌شده در نظر گرفته می‌شوند. برای هر $l=1,2$ و $i,j=1,\dots,n$، $Y_{i,j}^{(l)}=\frac{X_{i,j}^{(l)}}{w_i^{(l)}}$ خسارت نرمال شده است که در آن $w_i^{(l)}$ میزان در معرض خطر بودن مربوط به سال مبدأ iام در مثلث lام است که می‌تواند تعداد قراردادها و مقدار حق‌بیمهٔ دریافتی در سال مبدأ iام باشد (Shi and Frees, 2011). در این مقاله، از حق‌بیمه به‌عنوان مقدار در معرض خطر استفاده می‌شود. در وابستگی زوجی، فرض بر این است که خسارت‌های متناظر در هر سلول از دو مثلث تأخیر وابسته‌اند. بنابراین، برای هر $l=1,2$ و $i,j=1,\dots,n$، فرض می‌کنیم:

$$\left(\log Y_{i,j}^{(1)},\log Y_{i,j}^{(2)}\right)\mid\Lambda_{i,j}=\lambda\sim C_G\left(\Phi\left(.;\mu_{i,j}^{(1)},k\left(\lambda\right)\sigma_1^2\right),\Phi\left(.;\mu_{i,j}^{(2)},k\left(\lambda\right)\sigma_2^2\right);R\right),\Lambda_{i,j}\sim H\left(.\mid\nu\right) \qquad (۴)$$

که در آن $C_G\left(.,.;R\right)$ مفصل گاوسی دومتغیره با ماتریس همبستگی $R=\begin{bmatrix}1&\rho\\ \rho&1\end{bmatrix}$ است.

در این مقاله، $k\left(\lambda\right)=\lambda$ در نظر گرفته می‌شود. همچنین دو مدل تحلیل واریانس و تحلیل کواریانس برای تابع میانگین لگاریتم خسارت‌های معوق نرمال‌شده به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود. چون $\log Y_{i,j}^{(l)}$ به شرط $\Lambda_{i,j}=\lambda$ دارای توزیع نرمال با میانگین $\mu_{i,j}^{(l)}$ است، بنابراین

$$E\left(\log Y_{i,j}^{(l)}\right)=E\left(E\left(\log Y_{i,j}^{(l)}\middle|\Lambda_{i,j}\right)\right)=\mu_{i,j}^{(l)}.$$

در مدل تحلیل واریانس، تابع میانگین به‌صورت رابطهٔ (۵) نوشته می‌شود:

$$\mu_{i,j}^{(l)}=\alpha_i^{(l)}+\beta_j^{(l)}+\gamma_{t=i+j-1}^{(l)},\ i,j=1,\dots,n,l=1,2 \qquad (۵)$$

پارامترهای $\alpha_i^{(l)}$، $\beta_j^{(l)}$ و $\gamma_t^{(l)}$ به‌ترتیب اثرهای سال وقوع خسارت، تعداد سال‌های تأخیر و سال تقویمی در مثلث تأخیر lام است. برای انجام محاسبات برآورد پارامترهای مدل (۵)، شرط‌های زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{(l)}=0,\sum_{j=1}^{n}\beta_j^{(l)}=0,\ l=1,2$$

برای پیش‌بینی خسارت‌های معوق در پایین جدول مثلث تأخیر، اثر سال تقویمی مربوط به آن‌ها باید براساس مقادیر برآوردشدهٔ اثر سال تقویمی مربوط به مثلث بالایی محاسبه شود. برای این منظور، مدل سری زمانی قدم زدن تصادفی برای $\gamma_t^{(l)}$ ها به‌صورت زیر در نظر

گرفته می‌شود. برای $l=1,2$،

$$\gamma_t^{(l)}=\gamma_{t-1}^{(l)}+\epsilon_t^{(l)},\ \epsilon_t^{(l)}\sim N\left(0,\sigma^2_{\gamma^{(l)}}\right)$$

در مدل تحلیل کواریانس، تابع میانگین و شرط‌های درنظرگرفته‌شده روی پارامترهای آن به‌صورت زیر است:

$$\mu_{i,j}^{(l)}=i\alpha^{(l)}+\beta_j^{(l)}+\gamma_{t=i+j-1}^{(l)},\ \ i,j=1,\ldots,n,l=1\ ,2, \qquad (۶)$$

$$\gamma_t^{(l)}=\gamma_{t-1}^{(l)}+\epsilon_t^{(l)},\ \epsilon_t^{(l)}\sim N\left(0,\sigma^2_{\gamma^{(l)}}\right),$$
$$\sum_{i=1}^{n}\gamma_t^{(l)}=0$$

در مدل‌های (۵) و (۶)، اثر سال تقویمی $\left(\gamma_t^{(l)}\right)$ بیانگر نوعی از وابستگی بین پرداخت‌ها در یک سال تقویمی در یک مثلث تأخیر است. در بخش بعد، وابستگی تقویمی با استفاده از توزیع چندمتغیرۀ SMMNC و مفصل گاوسی مدل‌بندی می‌شود.

مدل وابستگی تقویمی

در وابستگی تقویمی، فرض بر این است که خسارت‌های معوق در هر سال تقویمی با سال‌های مبدأ متفاوت دارای وابستگی‌اند. این وابستگی از نوع وابستگی درون‌مثلثی است. همچنین فرض بر این است که خسارت‌های معوق در یک سال تقویمی یکسان در دو مثلث تأخیر نیز وابسته‌اند. این دو نوع وابستگی به‌طور توأم با استفاده از توزیع چندمتغیرۀ SMMNC به‌صورت زیر مدل‌بندی می‌شوند. فرض کنید:

$$\boldsymbol{Y}_t=\left(\boldsymbol{Y}_t^{(1)},\boldsymbol{Y}_t^{(2)}\right)=\left(Y_{t-j+1\ ,j}^{(1)},\ldots,Y_{1\ ,t}^{(1)},Y_{t-j+1\ ,j}^{(2)},\ldots,Y_{1\ ,t}^{(2)}\right)_{j=1\ ,\ldots,t}$$

خسارت‌های معوق نرمال‌شده در سال تقویمی tام باشد، به‌طوری‌که $\boldsymbol{Y}_t^{(1)}$ خسارت‌های معوق نرمال‌شده در سال تقویمی tام در مثلث تأخیر اول و $\boldsymbol{Y}_t^{(2)}$ خسارت‌های معوق نرمال‌شده در سال تقویمی tام در مثلث تأخیر دوم باشد. در وابستگی تقویمی، فرض می‌کنیم:

$$\log\boldsymbol{Y}_t\mid\Lambda_t=\lambda\sim C_G\left(\Phi\left(.;\mu_{t-j+1\ ,j}^{(1)},k(\lambda)\sigma_1^2\right),\ldots,\Phi\left(.;\mu_{1\ ,t}^{(1)},k(\lambda)\sigma_1^2\right),\right. \qquad (۶)$$
$$\left.\Phi\left(.;\mu_{t-j+1\ ,j}^{(2)},k(\lambda)\sigma_2^2\right),\ldots,\Phi\left(.;\mu_{1\ ,t}^{(2)},k(\lambda)\sigma_2^2\right);R_t\right)_{j=1\ ,\ldots,t},$$
$$\Lambda_t\sim H(\,.\mid\nu)\,.$$

در توزیع بالا، ماتریس همبستگی به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$R_t=\begin{bmatrix}R_{11} & R_{12}\\ R_{21} & R_{22}\end{bmatrix}$$

که در آن R_{11} و R_{22} به‌ترتیب ماتریس‌های همبستگی متناظر با خسارت‌های معوق سال تقویمی tام در مثلث اول و دوم هستند که مؤلفه‌های قطر اصلی آن‌ها عدد یک و خارج از قطر اصلی آن‌ها به‌ترتیب برابر θ_1 و θ_2 است. به همین ترتیب، $R_{12}=R_{21}$ ماتریس همبستگی بین خسارت‌های معوق سال تقویمی tام دو مثلث تأخیر است که مؤلفه‌های آن برابر θ_{12} در نظر گرفته می‌شود.

همانند حالت وابستگی زوجی، در حالت وابستگی تقویمی، دو مدل تحلیل واریانس و تحلیل کواریانس را برای تابع میانگین به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم. در این حالت، برخلاف حالت وابستگی زوجی، اثر سال تقویمی در این دو مدل در نظر گرفته نمی‌شوند.

در مدل تحلیل واریانس، تابع میانگین به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\mu_{i,j}^{(l)}=\mu^{(l)}+\alpha_i^{(l)}+\beta_j^{(l)},\ i,j=1\ ,\ldots,n,l=1\ ,2 \qquad (۸)$$

برای انجام محاسبات برآورد این پارامترها، شرط‌های زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{(l)}=0,\sum_{i=1}^{n}\beta_j^{(l)}=0,\ l=1,2$$

در مدل تحلیل کواریانس، تابع میانگین و شرط درنظرگرفته‌شده روی پارامترهای آن به‌صورت زیر است:

$$\mu_{i,j}^{(l)}=\mu^{(l)}+i\alpha^{(l)}+\beta_j^{(l)},\ \ i,j=1\ ,\ldots,n\ ,l=1\ ,2 \qquad (۹)$$
$$\sum_{i=1}^{n}\beta_j^{(l)}=0.$$

مروری بر پیشینۀ پژوهش

روش نردبان زنجیره‌ای یکی از قدیمی‌ترین روش‌های غیرتصادفی برآورد ذخیرۀ خسارت‌هاست که در آن مؤلفۀ تصادفی وجود ندارد. در این روش فرض می‌شود که ضرایب رشد خسارت برای سال‌های مختلف رخداد ثابت است. با توجه به اینکه این فرض ممکن است در بسیاری از رشته‌های بیمه‌ای برقرار نباشد، مدل‌های تصادفی مختلفی برای پیش‌بینی ذخیرۀ خسارت‌ها معرفی شده‌اند. Renshaw (1989)، Verrall (1996)، Haberman and Renshaw (1996) و Renshaw and Verrall (1998) روش تحلیل واریانس و تحلیل کواریانس را برای مدل‌های لُگ‌خطی و لُگ‌نرمال با در نظر گرفتن تأثیر سال وقوع خسارت و تعداد سال‌های تأخیر بررسی کرده‌اند. De Jong and Zehnwirth (1983)، Verrall (1989) و Ntzoufras and Dellaportas (2002) مدل قدم زدن تصادفی را برای خسارت‌های معوق در چارچوب مدل خطی استفاده کردند. علاوه‌بر عوامل سال وقوع خسارت و تعداد سال‌های تأخیر پرداخت خسارت، سال تقویمی پرداخت خسارت هم می‌تواند در میزان پرداخت خسارت‌های معوق برای سال‌های مبدأ متفاوت تأثیرگذار باشد. بنابراین در نظر گرفتن این مدل وابستگی بین میزان پرداخت‌های خسارت در یک سال تقویمی می‌تواند دقت پیش‌بینی در یک مثلث

تأخیر را بهبود بخشد. برای این منظور، بسیاری از پژوهشگران، از جمله Barnett and Zehnwirth (1998) و De Jong (2012)، در نظر گرفتن اثر سال تقویمی در مدل‌بندی تابع میانگین (مؤلفهٔ سیستماتیک) را پیشنهاد کردند.

در شرایط واقعی، خسارت‌های معوق ممکن است شامل خسارت‌های بزرگ باشند. درصورتی‌که توزیع مناسب برای این خسارت‌ها در نظر گرفته نشود، چنین خسارت‌های بزرگی می‌توانند خطای پیش‌بینی را به‌صورت قابل ملاحظه‌ای افزایش دهند. توزیع‌های دُم‌سنگین با توجه به توانایی‌شان در شناسایی مشاهدات بزرگ، توزیع‌های مناسبی برای مدل‌بندی داده‌های خسارت و پیش‌بینی خسارت‌های معوق‌اند (Choy and Smith, 1997). Choy *et al.* (2016) از توزیع‌های آمیخته _مقیاس نرمال که شامل توزیع‌های دُم‌سنگین هستند، به‌عنوان توزیع میزان خسارت معوق در یک مثلث تأخیر استفاده کردند.

Shi and Frees (2011) استفاده از مفصل برای مدل‌بندی وابستگی سلولی (در حالتی که دو مثلث تأخیر داشته باشیم، وابستگی زوجی گفته می‌شود) بین مثلث‌های تأخیر، یعنی برای وابستگی $(X_{i,j}^{(1)}, X_{i,j}^{(2)}, \ldots, X_{i,j}^{(L)})$ را پیشنهاد کردند. آن‌ها از مفصل ارشمیدسی فرانک و مفصل گاوسی برای مدل‌بندی وابستگی داده‌های دو رشتهٔ بیمهٔ اتومبیل شخصی و رشتهٔ بیمهٔ اتومبیل غیرشخصی (تجاری) و به‌ترتیب، از توزیع‌های لُگ‌نرمال و گاما به‌عنوان توزیع خسارت آن‌ها استفاده کردند. در این مدل‌بندی، تأثیر تعداد سال‌های تأخیر و سال وقوع خسارت در تابع میانگین در نظر گرفته شده است. Shi *et al.* (2012) علاوه‌بر وابستگی سلولی که آن را با استفاده از توزیع لُگ‌نرمال چندمتغیره مدل‌بندی کرد، برای پیش‌بینی خسارت‌های معوق، وابستگی دیگری را بین مثلث‌های تأخیر پیشنهاد کرد که ناشی از اثر سال تقویمی است. برای این منظور، علاوه‌بر اثرهای سال وقوع خسارت و تعداد سال‌های تأخیر، اثر سال تقویمی یکسان برای مثلث‌های تأخیر وابسته در نظر گرفت. Abdallah *et al.* (2016A) وابستگی درون یک مثلث تأخیر در یک سال تقویمی و همچنین وابستگی بین دو مثلث تأخیر وابسته در سال‌های تقویمی یکسان را با استفاده از مفصل گاوسی و مفصل ارشمیدسی سلسله‌مراتبی مدل‌بندی کردند. Abdallah *et al.* (2016B) از خانوادهٔ توزیع‌های دومتغیرهٔ سارمانوف برای مدل‌بندی وابستگی بین دو مثلث تأخیر استفاده کردند. Avanzi *et al.* (2016) خانوادهٔ تویدی را برای مدل‌بندی وابستگی سلولی بین مثلث‌های تأخیر به کار بردند. به‌تازگی، Goudarzi and Zokaei (2021) مسئلهٔ مدل‌بندی توأم مثلث‌های تأخیر را در حالت وابستگی سلولی با الهام از دیدگاه Choy *et al.* (2015) بررسی کردند. آن‌ها از توزیع آمیخته _مقیاس نرمال چندمتغیره برای مدل‌بندی توزیع توأم خسارت‌های معوق در مثلث‌های تأخیر که شامل توزیع‌های دمسنگین است استفاده کردند.

Shakoori *et al.* (2022) تعمیمی از مدلی را که Goudarzi and Zokaei (2021) ارائه کرده با نام توزیع آمیخته _مقیاس چندمتغیره با توزیع‌های حاشیه‌ای نرمال و وابستگی مفصل (SMMNC) برای مدل‌بندی توزیع توأم پرداخت‌های خسارت در سلول‌های متناظر مثلث‌های تأخیر ارائه کردند. علاوه‌بر دُم‌سنگین بودن این مدل، انعطاف در استفاده از مفصل‌های گوناگون برای مدل‌بندی وابستگی بین مثلث‌های تأخیر از مزیت‌های این مدل است. Shakoori *et al.* (2022) وابستگی پرداخت‌های خسارت‌های معوق موجود در هر سال تقویمی در یک مثلث تأخیر را با اضافه کردن اثر سال تقویمی در تابع میانگین در نظر گرفتند. برای نتایج بیشتر دربارهٔ مدل‌بندی خسارت‌های معوق می‌توان به Braun (2004)، Hess *et al.* (2006)،Chan *et al.* (2008)، Côté *et al.* (2016) و Zhang (2010)، Merz *et al.* (2013) مراجعه کرد.

روش‌شناسی پژوهش

در این مقاله، پرسش اصلی این است که آیا مدل‌بندی وابستگی بین خسارت‌های معوق در دو مثلث تأخیر و همچنین وابستگی بین خسارت‌های معوق در یک سال تقویمی به‌صورت توأم با استفاده از توزیع چندمتغیره می‌تواند باعث افزایش دقت پیش‌بینی خسارت‌های معوق در مقایسه با در نظر گرفتن اثر سال تقویمی در تابع میانگین به‌عنوان نوعی از وابستگی بین خسارت‌های معوق پرداختی در یک سال تقویمی شود. برای پاسخ به این پرسش، دو روش مدل‌بندی وابستگی بین خسارت‌های معوق پرداختی در یک سال تقویمی بر روی داده‌های دو مثلث تأخیر مربوط به دو رشتهٔ بیمهٔ شخص ثالث و بیمهٔ بدنهٔ یک شرکت بیمهٔ ایرانی اجرا شده و با استفاده از معیارهای ارزیابی مدل، دو روش مقایسه شده‌اند. برای برآورد پارامترهای مدل و پیش‌بینی خسارت‌های معوق، از رهیافت بیزی و روش نمونه‌گیری مونت _کارلوی همیلتونی با به‌کارگیری بستهٔ نرم‌افزاری rstan در نرم‌افزار R استفاده شده است. بنابراین، این مقاله در حوزهٔ پژوهش‌های کمّی و تحلیلی با رویکرد توسعه‌ای _کاربردی قرار می‌گیرد.

نتایج و بحث

در این بخش، داده‌های پرداخت خسارت در دو رشتهٔ بیمهٔ بدنه و بیمهٔ شخص ثالث اتومبیل یکی از شرکت‌های بیمهٔ ایرانی، که Goudarzi and Zokaei (2018) تحلیل کرده‌اند، استفاده می‌شود. پرداخت خسارت‌های معوق برای این دو رشتهٔ بیمه‌ای به‌صورت فصلی از سال ۱۳۹۲ تا ۱۳۹۵ ثبت شده است. بنابراین، هر واحد تأخیر به‌معنای یک فصل (سه ماه) تأخیر در پرداخت خسارت است که بر این اساس هر مثلث تأخیر دارای ۱۶ سطر و ۱۶ ستون است؛ یعنی داده‌ها به‌صورت زیر است (جدول ۴ و جدول ۵ را مشاهده کنید).

$$\left\{X_{i,j}^{(l)}; i,j=1,\ldots,16, i+j-1=1,\ldots,16, l=1,2\right\}$$

در اینجا، $l=1$ برای مثلث تأخیر مربوط به رشتهٔ بیمهٔ بدنه و $l=2$ برای مثلث تأخیر مربوط به رشتهٔ بیمهٔ شخص ثالث به

کار برده می‌شود. Goudarzi and Zokaei (2018) نشان دادند که خسارت‌های معوق در سلول‌های متناظر در دو مثلث تأخیر دارای همبستگی مثبت معنی‌دار هستند و ضریب همبستگی پی‌یرسون بین میزان خسارت سلول‌های متناظر در مثلث‌های تأخیر این دو رشتهٔ بیمه ۰/۶۷ است که بیانگر وجود همبستگی بین دو مثلث تأخیر است. بنابراین از مدل‌های ارائه‌شده، مدل وابستگی زوجی و وابستگی تقویمی، برای پیش‌بینی خسارت‌های معوق در مثلث‌های پایینی و در نهایت محاسبهٔ کل ذخیره مورد نیاز استفاده می‌کنیم. برای این منظور، از تحلیل بیزی و روش نمونه‌گیری HMC برای تولید نمونه از توزیع‌های پسین و برآورد مدل استفاده می‌شود. برای اجرای الگوریتم HMC، بستهٔ نرم‌افزاری Stan به کار برده می‌شود. این بستهٔ نرم‌افزاری از طریق بستهٔ rstan در نرم‌افزار R پیاده‌سازی می‌شود. در دو مدل وابستگی زوجی و تقویمی، از توزیع‌های پیشین ناآگاهی‌بخش که در ادامه آورده می‌شود، استفاده می‌کنیم.

توزیع‌های پیشین در حالت وابستگی زوجی

در این وابستگی، توزیع‌های پیشین مورد استفاده برای پارامترهای توزیع SMMNC (رابطهٔ (۴)) به‌صورت زیر است

$$\rho \sim N(0\ ,100)T_{[-1\ ,1]}\ ,\ \sigma_l^2 \sim IG(0/001\ ,0/001)\ ,\ l=1\ ,2\ ,$$
$$\Lambda_{i,j} \sim IG\left(\frac{\nu}{2},\frac{\nu}{2}\right), i=1\ ,\ldots,16\ ,\ j=1\ ,\ldots\ ,16-i+1\ ,$$
$$\nu \sim G(12\ ,2)T_{[2\ ,42]}$$

که در آن $N(\theta,\tau^2)T_{[a,b]}$، $G(a\ ,b)$ و $IG(a\ ,b)$ به‌ترتیب توزیع بریده‌شدهٔ نرمال با میانگین θ و واریانس τ^2 روی بازهٔ $[a,b]$ ، گاما و گامای معکوس با پارامتر شکل a و پارامتر نرخ b است. توزیع‌های پیشین برای مدل‌های تحلیل واریانس (رابطهٔ (۵)) و تحلیل کواریانس (رابطهٔ (۶)) با لحاظ کردن اثر سال تقویمی به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

در مدل تحلیل واریانس، برای $l=1\ ,2$،

$$\alpha_i^{(l)} \sim N(0\ ,100)\ ,i=1\ ,\ldots,16\ ,$$
$$\beta_j^{(l)} \sim N(0\ ,100), j=1\ ,\ldots\ ,16\ ,$$
$$\gamma_t^{(l)} \sim N\left(\gamma_{t-1}^{(l)},\sigma_{\gamma^{(l)}}^2\right)\ ,t=2\ ,\ldots,16\ ,$$
$$\gamma_1^{(l)} \sim N\left(0\ ,\sigma_{\gamma^{(l)}}^2\right),\sigma_{\gamma^{(l)}}^2 \sim IG(0/001\ ,0/001).$$

همچنین برای $l=1\ ,2$، شرط‌های زیر را می‌توان در نظر گرفت:

$$\sum_{i=1}^{16}\alpha_i^{(l)}=0\ ,\sum_{i=1}^{16}\beta_i^{(l)}=0$$

در مدل تحلیل کواریانس، تحت شرط‌های

$$\sum_{t=1}^{16}\gamma_t^{(1)}=0\ ,\sum_{t=1}^{16}\gamma_t^{(l)}=0\ ,$$

برای $l=1\ ,2$،

$$\beta_j^{(l)} \sim N(0\ ,100), j=1\ ,\ldots,16\ ,$$
$$\gamma_t^{(l)} \sim N\left(\gamma_{t-1}^{(l)},\ \sigma_{\gamma^{(l)}}^2\right), t=2\ ,\ldots,16\ ,$$
$$\gamma_1^{(l)} \sim N\left(0\ ,\sigma_{\gamma^{(l)}}^2\right),\ \sigma_{\gamma^{(l)}}^2 \sim IG(0/001\ ,0/001).$$

توزیع‌های پیشین در وابستگی تقویمی

در این وابستگی، توزیع‌های پیشین برای پارامترهای توزیع SMMNC (رابطهٔ (۷)) به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\log\left(\frac{\theta_1}{1-\theta_1}\right) \sim N(0/5\ ,0/5),$$
$$\log\left(\frac{\theta_2}{1-\theta_2}\right) \sim N(0/5\ ,0/5),$$
$$\log\left(\frac{\theta_{12}}{1-\theta_{12}}\right) \sim N(0/5\ ,0/5),$$
$$\sigma_l^2 \sim IG(0/001\ ,0/001)\ ,l=1\ ,2\ ,$$
$$\Lambda_t \sim IG\left(\frac{\nu}{2},\frac{\nu}{2}\right), t=1\ ,\ldots,16\ ,\nu \sim G(12\ ,2)T_{[2\ ,42]}.$$

توزیع‌های پیشین مربوط به دو مدل تحلیل واریانس (رابطهٔ (۸)) و تحلیل کواریانس (رابطهٔ (۹)) به شرح زیر است:

در مدل تحلیل واریانس، برای $l=1\ ,2$، تحت شرط‌های

$$\sum_{i=1}^{16}\alpha_i^{(l)}=0\ ,\sum_{i=1}^{16}\beta_i^{(l)}=0$$

توزیع‌های پیشین زیر در نظر گرفته می‌شود. برای $l=1\ ,2$،

$$\mu^{(l)} \sim N(0\ ,100),\alpha_i^{(l)} \sim N(0\ ,100), i=1\ ,\ldots,16\ ,$$
$$\beta_j^{(l)} \sim N(0\ ,100), j=1\ ,\ldots,16.$$

در مدل تحلیل کواریانس، برای $l=1\ ,2$، تحت شرط

$$\sum_{i=1}^{16}\beta_i^{(l)}=0\ ,$$

توزیع‌های پیشین برای پارامترهای مدل به‌صورت زیر است:

$$\beta_j^{(l)} \sim N(0\ ,100)\ , j=1\ ,\ldots,16\ ,\ \alpha^{(l)} \sim N(0\ ,100).$$

معیار انتخاب مدل

معیارهای مختلفی برای مقایسهٔ مدل‌ها از جنبه‌های مختلف

وجود دارد (Shakoori et al., 2022). در این مقاله، مقایسهٔ دو مدل معرفی شده که وابستگی زوجی و تقویمی براساس دقت پیش‌بینی آن‌ها صورت می‌گیرد. برای این منظور، از معیار MAPE استفاده می‌کنیم. برای محاسبهٔ MAPE از خسارت‌های پرداخت‌شدهٔ ۱۵ فصل ابتدایی داده‌های دو مثلث تأخیر استفاده می‌کنیم. پس از برازش مدل، پرداخت‌های مربوط به قطر ۱۶ام، که مشاهدات آن نیز موجود است، پیش‌بینی می‌شود. بر این اساس، معیار MAPE به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{MAPE}=\frac{1}{N}\sum_{A}\left|\frac{\hat{y}_{i,j}^{(l)}-y_{i,j}^{(l)}}{y_{i,j}^{(l)}}\right|\times 100$$

که در آن $y_{i,j}$ و $\hat{y}_{i,j}$ به‌ترتیب مقدار مشاهده‌شدهٔ لگاریتم خسارت معوق نرمال‌شده و پیش‌بینی‌شده توسط مدل در lامین مثلث است. همچنین،

$$A=\{(i\ ,j\ ,l);i,j=1\ ,\dots\ ,15\ ,i+j-1=16\ ,l=1\ ,2\}$$

و N تعداد اعضای مجموعهٔ A است.

پیش‌بینی ذخایر در دو رشتهٔ بیمهٔ بدنه و بیمهٔ شخص ثالث

در این بخش، ذخایر مورد نیاز برای پرداخت خسارت‌های معوق در دو رشتهٔ بیمهٔ بدنه و شخص ثالث به روش بیزی و با استفاده از توزیع‌های پیشین انتخاب‌شده در بخش قبل محاسبه می‌شود. برای این منظور، ابتدا بهترین مدل وابستگی (تقویمی یا زوجی) و همچنین بهترین مدل میانگین (تحلیل واریانس یا تحلیل کواریانس) با استفاده از معیار MAPE انتخاب می‌شود و سپس مدل انتخاب‌شده به داده‌ها برازش داده و مقدار خسارت‌های معوق پیش‌بینی می‌شود.

مقایسهٔ مدل وابستگی تقویمی با مدل وابستگی زوجی در دو حالت با اثر سال تقویمی و بدون اثر سال تقویمی مبتنی بر داده‌های جدول‌های ۴ و ۵ است. مقادیر محاسبه‌شدهٔ MAPE برای این مدل‌ها در جدول ۲ آورده شده است. براساس نتایج به‌دست‌آمده، برای هرکدام از مدل‌های میانگین تحلیل واریانس و تحلیل کواریانس، وابستگی تقویمی دارای MAPE کمتر است؛ یعنی دقت پیش‌بینی ذخیرهٔ زیان براساس مدل وابستگی تقویمی بیشتر است. همچنین، در هر نوع وابستگی، مدل تحلیل کواریانس دارای MAPE کمتر از مدل تحلیل واریانس است. بنابراین، برای داده‌های مورد استفاده، بهترین مدل، از نظر دقت پیش‌بینی، حالت وابستگی تقویمی با مدل میانگین تحلیل کواریانس است.

با توجه به اینکه مدل وابستگی تقویمی با مدل میانگین تحلیل کواریانس دارای بیشترین دقت پیش‌بینی برای داده‌های مورد استفاده است، بنابراین در این بخش، به روش بیزی، خسارت‌های معوق پرداخت‌نشده را با استفاده از این مدل پیش‌بینی می‌کنیم. همان‌طور که قبلاً اشاره شد، برای تولید نمونه از توزیع پسین پارامترها از بستهٔ rstan در نرم افزار R که مبتنی بر روش نمونه‌گیری HMC است استفاده می‌کنیم. تولید نمونه با استفاده از سه زنجیر که هرکدام شامل ۵۰۰۰ تکرار است انجام می‌گیرد. در هر زنجیر، ۲۰۰۰ تکرار اول به‌عنوان مرحلهٔ داغیدن در نظر گرفته و حذف می‌شود. بنابراین، برآورد پارامترها براساس نمونهٔ ۹۰۰۰تایی است. در تولید نمونه به روش HMC، $\mathrm{adapt\_delta}$ و $\mathrm{max\_treedepth}$ دو پارامتر دقت هستند که در این مقاله به‌ترتیب ۰/۹۹ و ۱۵ در نظر گرفته می‌شوند. به‌منظور بررسی مسئلهٔ استقلال، دقت و همگرایی نمونهٔ تولیدشده از توزیع پسین، دو معیار اندازهٔ نمونهٔ مؤثر و آمارهٔ پتانسیلی کاهش مقیاس که به‌ترتیب با $\mathrm{N_{eff}}$ و $\hat{R}$ نمایش داده می‌شود، در خروجی stan گزارش داده می‌شود. برای سه زنجیر، N_{eff} باید عددی بیشتر از ۳۰۰ و $\hat{R}$ نیز عددی نزدیک به یک باشد. ردنگاشت نیز ابزاری مناسب برای بررسی همگرایی یک زنجیر و همچنین آمیختگی زنجیرهاست. در جدول ۳، برای برخی از پارامترهای مدل مقادیر شبیه‌سازی‌شده میانگین پسین، انحراف معیار، چندک ۰/۰۲۵، میانه و چندک ۰/۹۷۵ و همچنین معیارهای N_{eff} و $\hat{R}$ آورده شده است. برای تمام پارامترها، مقدار N_{eff} بیشتر از ۳۰۰ است که نشان‌دهندهٔ اطمینان‌پذیری نمونه‌های تولیدشده برای برآورد پارامترهاست. مقدار $\hat{R}$ نیز برای تمام پارامترها برابر ۱ است که نشان‌دهندهٔ آمیخته بودن سه زنجیر و همگرایی آن‌ها به توزیع پسین پارامترهاست. همچنین، در شکل‌های ۲ و ۳، ردنگاشت پارامترهای θ_1، θ_2، θ_{12}، σ_1^2 و σ_2^2 رسم شده است که نشان‌دهندهٔ همگرایی به توزیع پسین و همچنین آمیختگی سه زنجیر است. برآورد بیزی پارامترهای همبستگی θ_1 و θ_2 با استفاده از میانگین توزیع پسین به‌ترتیب برابر است با ۰/۴۱ و ۰/۷۸ که نشان‌دهندهٔ وابستگی تقویمی در هر دو مثلث تأخیر است. همچنین، وابستگی تقویمی در مثلث تأخیر مربوط به رشتهٔ بیمهٔ شخص ثالث بیشتر از وابستگی تقویمی مربوط به رشتهٔ بیمهٔ بدنه است. برآورد بیزی پارامتر

جدول ۲: معیار MAPE برای مدل‌های با وابستگی تقویمی و زوجی

Table 2: The MAPE criterion for the models with calendar and pair-wise dependence models

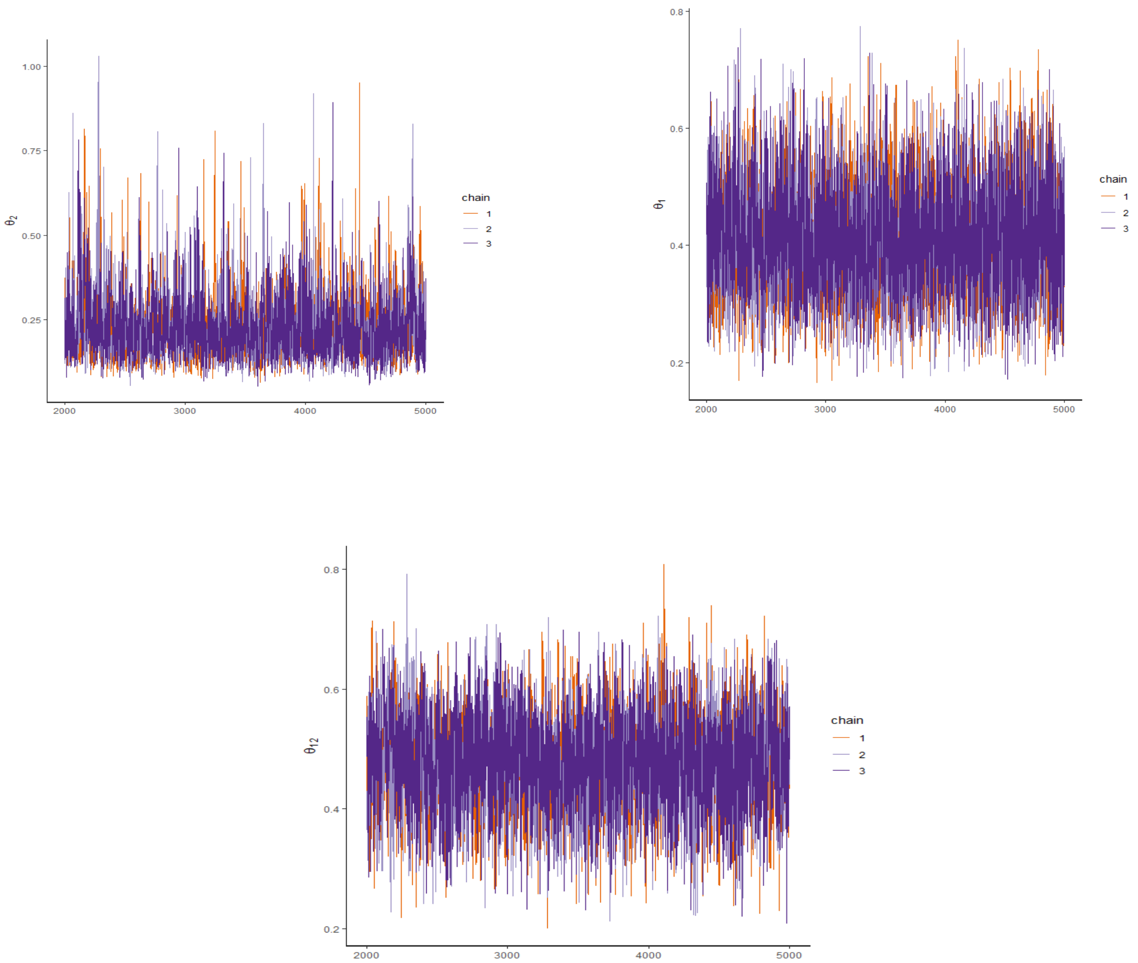
مدل وابستگی (Dependence model)	مدل میانگین (Mean model)	MAPE
تقویمی (Calendar)	تحلیل واریانس (ANOVA)	1/02
	تحلیل کواریانس (ANCOVA)	0/94
زوجی با اثر سال تقویمی (Pair-wise with calendar year effect)	تحلیل واریانس (ANOVA)	1/51
	تحلیل کواریانس (ANCOVA)	1/02
زوجی بدون اثر سال تقویمی (Pair-wise without calendar year effect)	تحلیل واریانس (ANOVA)	1/08
	تحلیل کواریانس (ANCOVA)	1/004

وابستگی دو مثلث، یعنی θ_{12}، برابر ۰/۴۸ است که نشان‌دهندهٔ وابستگی بین خسارت‌های معوق دو رشتهٔ بیمهٔ بدنه و بیمهٔ شخص ثالث است.

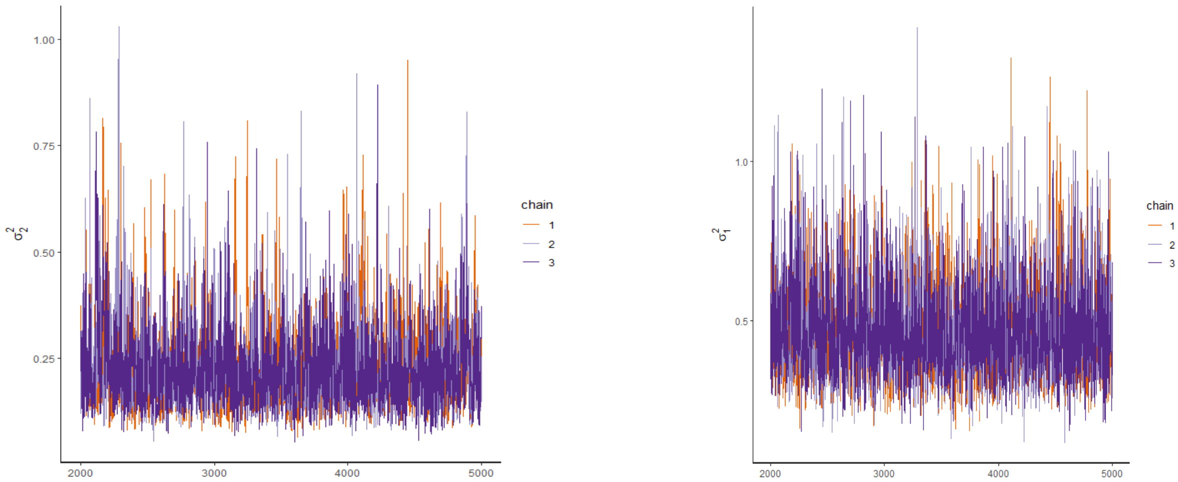
در جدول ۴ و جدول ۵ پیش‌بینی خسارت‌های معوق نرمال‌شده در دو رشتهٔ بیمه‌ای براساس میانگین توزیع پسین آن‌ها محاسبه شده است. در جدول ۴، به‌طور مثال، مقدار خسارت معوق نرمال‌شدهٔ

جدول ۳: شبیه‌سازی مشخصه‌هایی از توزیع پسین پارامترها در مدل وابستگی تقویمی با مدل میانگین تحلیل کواریانس
Table 3: The simulated characteristics of posterior distribution of parameters in the calendar dependence model with the ANCOVA mean model

پارامترها (Parameters)	Mean	SD	$Q_{0/025}$	Median	$Q_{0/975}$	N_{eff}	$\hat{R}$
θ_1	0/41	0/09	0/24	0/41	0/61	4993	1
θ_2	0/78	0/06	0/64	0/78	0/89	2164	1
θ_{12}	0/48	0/08	0/31	0/48	0/64	2347	1
σ_1^2	0/47	0/14	0/25	0/44	0/81	2940	1
σ_2^2	0/23	0/1	0/1	0/21	0/47	1348	1
$\alpha^{(1)}$	0/01	0/03	-0/04	0/01	0/09	1101	1
$\alpha^{(2)}$	0/05	0/04	-0/01	0/04	0/14	740	1
υ	3/6	1/65	3/49	6/17	9/86	6899	1
$\beta_1^{(1)}$	4/88	0/28	4/29	4/9	5/37	1274	1
$\beta_1^{(2)}$	0/82	0/27.	0/13	0/86	1/22	746	1
$\beta_{16}^{(1)}$	-2/34	0/77	-3/88	-2/34	-0/81	5315	1



شکل ۲: ردنگاشت پارامترهای θ_1، θ_2، θ_{12}
Figure 2: Trace plot of parameters θ_1،θ_2،θ_{12}



شکل ۳: ردنگاشت پارامترهای σ_1^2 ،σ_2^2

Figure 3: Trace plot of parameters σ_1^2, σ_2^2

مشاهده‌شده مربوط به بهار سال ۱۳۹۳ و سال تأخیر ۳ برابر ۰/۰۶۶۹ است که مقدار پیش‌بینی‌شدهٔ آن (که در پرانتز قرار دارد) برابر ۰/۰۵۸۳ است. همچنین، مقدار پیش‌بینی خسارت معوق نرمال‌شده مربوط به بهار ۱۳۹۴ و سال تأخیر ۱۱ برابر ۰/۰۰۰۸ به‌دست آمده است. براساس مقادیر پیش‌بینی‌شده از خسارت‌های معوق در مثلث‌های پایینی دو جدول ۴ و ۵، ذخیرهٔ کل به تفکیک دو رشتهٔ بیمهٔ بدنه و بیمهٔ شخص ثالث پیش‌بینی و مشخصه‌هایی از توزیع پسین آن‌ها در جدول ۶ آورده شده است. بر این اساس، ذخیرهٔ کل پیش‌بینی برای بیمهٔ بدنه برابر ۳۰۰۵۶۰۵۶۲۳۱۴ و برای بیمهٔ شخص ثالث برابر $۸/۵۹۱\times ۱۰^{۱۳}$ است. در شکل ۴ نیز تابع چگالی توزیع پسین ذخیره کل برای دو رشتهٔ بیمهٔ بدنه و شخص ثالث رسم شده است.

جمع‌بندی و پیشنهادها

بیمه‌گر برای پرداخت تعهدات ناشی از خسارت‌های معوق نیاز به ذخیره‌ای دارد که ذخیرهٔ خسارت‌های معوق نامیده می‌شود. اندازه‌گیری این ذخایر یکی از عوامل مؤثر در محاسبهٔ توانگری مالی شرکت‌های بیمه شناخته می‌شود. مجموعه دادهٔ خسارت‌های معوق مربوط به یک رشتهٔ بیمه‌ای به‌صورت جدولی به نام مثلث تأخیر نمایش داده می‌شود. معمولاً خسارت‌های معوق رشته‌های مختلف بیمه در یک شرکت بیمه وابسته هستند و ازاین‌رو از توزیع‌های توأم برای پیش‌بینی خسارت‌های معوق و محاسبهٔ ذخیرهٔ لازم استفاده می‌شود. در مدل‌بندی میانگین خسارت‌های معوق، پژوهشگران از عامل‌هایی مانند سال وقوع خسارت و تعداد سال‌های تأخیر استفاده کرده‌اند. تصمیمات مدیریتی که یک شرکت در یک سال لحاظ می‌کند می‌تواند بر تمامی پرداخت‌های خسارت‌های معوق با سال‌های وقوع متفاوت که در آن سال تقویمی انجام می‌گیرد اثر هم‌زمان داشته باشد. بنابراین خسارت‌های معوقی که در یک سال تقویمی یکسان پرداخت می‌شوند دارای وابستگی هستند. برخی پژوهشگران با در نظر گرفتن عامل سال تقویمی در مدل‌بندی میانگین خسارت‌ها، این نوع وابستگی را در نظر گرفته‌اند. به‌تازگی، Shakoori *et al.* (2022) با اضافه کردن عامل اثر سال تقویمی در تابع میانگین خسارت‌های معوق، به پیش‌بینی خسارت‌های معوق در مثلث‌های تأخیر وابسته پرداخته‌اند. آن‌ها همچنین، وابستگی بین مثلث‌های تأخیر را به‌صورت سلولی در نظر گرفته و توزیع چندمتغیرهٔ SMMNC را برای مدل‌بندی توزیع توأم خسارت‌های معوق در سلول‌های متناظر مثلث‌های تأخیر وابسته معرفی و استفاده کرده‌اند. جایگزین اضافه کردن عامل اثر سال تقویمی در تابع میانگین برای مدل‌بندی وابستگی بین خسارت‌های پرداخت‌شده در یک سال تقویمی، استفاده از توزیع چندمتغیره به عنوان توزیع توأم آن است. در این رویکرد، به‌جای وابسته در نظر گرفتن سلول‌های متناظر دو مثلث تأخیر، پرداخت‌های متناظر دو مثلث در یک سال تقویمی وابسته در نظر گرفته و از توزیع چندمتغیره برای توزیع توأم آن‌ها استفاده می‌شود. در این صورت، وابستگی بین دو مثلث و وابستگی بین خسارت‌های پرداخت‌شده در یک سال تقویمی با استفاده از توزیع چندمتغیره به‌صورت توأم مدل‌بندی می‌شوند. براساس این رویکرد که مدل وابستگی تقویمی نامیده می‌شود، در این مقاله به پیش‌بینی خسارت‌های معوق و محاسبهٔ ذخیرهٔ مورد نیاز برای دو رشتهٔ بیمهٔ بدنه و بیمهٔ شخص ثالث یک شرکت بیمهٔ ایرانی با استفاده از مثلث‌های تأخیر آن‌ها پرداخته شده است. برای این منظور، از توزیع چندمتغیرهٔ SMMNC با مفصل گاوسی استفاده شده است. با استفاده از معیار MAPE نشان داده شده است که استفاده از توزیع چندمتغیرهٔ SMMNC با رویکرد بالا، برای لحاظ کردن وابستگی بین خسارت‌های پرداخت‌شده در یک سال تقویمی، دارای دقت پیش‌بینی بیشتر نسبت به رویکرد مورد استفاده در Shakoori *et al.* (2022) است، یعنی حالتی که این وابستگی با اضافه کردن عامل سال تقویمی در تابع میانگین لحاظ شود.

جدول ۴: خسارت‌های معوق نرمال‌شدهٔ بیمهٔ بدنه و مقادیر پیش‌بینی‌شدهٔ آن‌ها براساس وابستگی تقویمی و مدل تحلیل کوواریانس

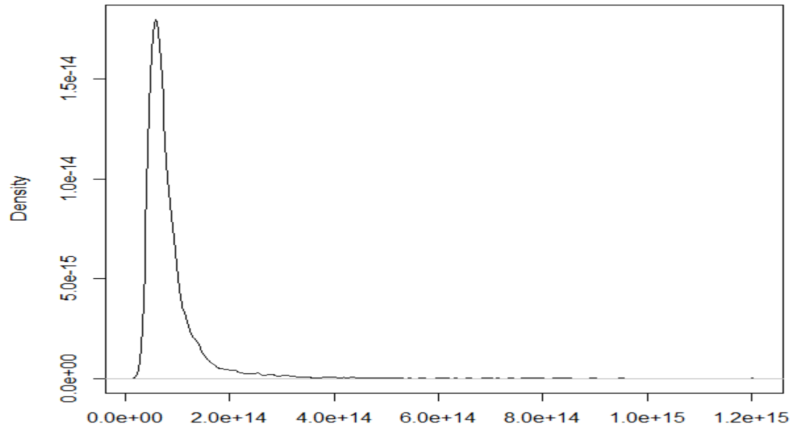
Table 4: The normalized outstanding claims of Collision and Comprehensive Insurance and their predicted values in the calendar dependence model with the ANCOVA mean model

سال خسارت (Accident year)	فصل خسارت (Accident season)	فصل توسعهٔ خسارت(Development season lag)															
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1392	بهار (spring)	0/3627 (0/3408)	0/2799 (0/2664)	0/0719 (0/0562)	0/0185 (0/0160)	0/0081 (0/0051)	0/0035 (0/0029)	0/0012 (0/0017)	0/0029 (0/0015)	0/0015 (0/0005)	0/0016 (0/0005)	0/0003 (0/0007)	0/0004 (0/0004)	0/0005 (0/0003)	0/0001 (0/0004)	0/0004 (0/0006)	0/0002 (0/0003)
	تابستان (summer)	0/3347 (0/3429)	0/2635 (0/2682)	0/0771 (0/0567)	0/0229 (0/0161)	0/0064 (0/0051)	0/0045 (0/0029)	0/0034 (0/0017)	0/0007 (0/0015)	0/0003 (0/0005)	0/0003 (0/0005)	0/0012 (0/0006)	0/0009 (0/0005)	0/0003 (0/0003)	0/0006 (0/0004)	0/0003 (0/0006)	0/00035
	پاییز (fall)	0/3374 (0/3453)	0/3139 (0/2703)	0/0549 (0/0527)	0/0251 (0/0162)	0/0066 (0/0052)	0/0056 (0/0029)	0/0022 (0/0018)	0/0019 (0/0015)	0/0009 (0/0005)	0/0005 (0/0006)	0/0002 (0/0007)	0/0008 (0/0005)	0/0009 (0/0003)	0/0001 (0/0004)	0/0006	0/00036
	زمستان (winter)	0/314 (0/348)	0/164 (0/2727)	0/0577 (0/0577)	0/012 (0/0164)	0/0054 (0/0053)	0/0024 (0/0003)	0/0026 (0/0018)	0/001 (0/0002)	0/0004 (0/0005)	0/0001 (0/0006)	0/0001 (0/0007)	0/0008 (0/0005)	0/0003 (0/0003)	0/0004	0/0006	0/00037
1393	بهار (spring)	0/3459 (0/3512)	0/3065 (0/2754)	0/0669 (0/0583)	0/0243 (0/0166)	0/0055 (0/0053)	0/0029 (0/003)	0/01 (0/0018)	0/0017 (0/0016)	0/0002 (0/0005)	0/0002 (0/0006)	0/0005 (0/0007)	0/0007 (0/0005)	0/0003	0/0004	0/0006	0/0004
	تابستان (summer)	0/3519 (0/3547)	0/2728 (0/2784)	0/067 (0/0590)	0/0108 (0/0168)	0/0021 (0/0054)	0/0003 (0/0003)	0/0009 (0/0018)	0/0011 (0/0016)	0/0002 (0/0005)	0/0003 (0/0006)	0/0001 (0/0007)	0/0004	0/00036	0/0004	0/0006	0/00038
	پاییز (fall)	0/3286 (0/3586)	0/2722 (0/2818)	0/0032 (0/0598)	0/0092 (0/0117)	0/0037 (0/0055)	0/0026 (0/0031)	0/0004 (0/0019)	0/0011 (0/0016)	0/0009 (0/0005)	0/0006 (0/0006)	0/0008	0/0005	0/0004	0/00046	0/0007	0/0004
	زمستان (winter)	0/3117 (0/363)	0/1597 (0/2855)	0/0346 (0/060)	0/0075 (0/0173)	0/0025 (0/0056)	0/0013 (0/0031)	0/0006 (0/0019)	0/0003 (0/0012)	0/0006 (0/0005)	0/0006	0/0007	0/0005	0/00038	0/00047	0/0007	0/00041
1394	بهار (spring)	0/4169 (0/3679)	0/3115 (0/2896)	0/053 (0/0616)	0/0219 (0/0176)	0/0042 (0/0057)	0/0015 (0/0032)	0/0009 (0/0019)	0/001 (0/0017)	0/0006	0/0006	0/0008	0/0005	0/00039	0/00048	0/0007	0/0004
	تابستان (summer)	0/422 (0/3732)	0/2739 (0/2941)	0/0537 (0/0626)	0/0111 (0/0117)	0/0022 (0/0058)	0/002 (0/0033)	0/0039 (0/002)	0/0017	0/0006	0/0006	0/0008	0/0005	0/0004	0/0005	0/0007	0/0004
	پاییز (fall)	0/4217 (0/3791)	0/3496 (0/299)	0/0446 (0/0637)	0/0082 (0/0182)	0/0075 (0/059)	0/0026 (0/0033)	0/0020	0/0018	0/0006	0/0007	0/0008	0/0006	0/0004	0/0005	0/0008	0/0005
	زمستان (winter)	0/3826 (0/3855)	0/1997 (0/3044)	0/0496 (0.0649)	0/0102 (0.0186)	0/0072 (0.006)	0/0034	0/0021	0/0018	0/0006	0/0007	0/0009	0/0006	0/00043	0/00054	0/00029	0/0008
1395	بهار (spring)	0/4843 (0/3925)	0/3268 (0/3103)	0/0501 (0/0662)	0/0258 (0/019)	0/0062	0/0035	0/0021	0/002	0/0006	0/0007	0/0009	0/0006	0/0004	0/0005	0/00084	0/00049
	تابستان (summer)	0/4119 (0/4002)	0/3144 (0/3167)	0/0624 (0/0677)	0/0197	0/0063	0/0036	0/0022	0/002	0/00064	0/0007	0/0009	0/0006	0/0005	0/0006	0/0009	0/0005
	پاییز (fall)	0/3749 (0/4085)	0/3369 (0/3237)	0/0693	0/0199	0/0065	0/0037	0/0023	0/002	0/0007	0/0007	0/0009	0/0007	0/0005	0/0006	0/0009	0/0005
	زمستان (winter)	0/3409 (0/4177)	0/3314	0/071	0/0204	0/0067	0/0038	0/0023	0/002	0/0007	0/0007	0/0009	0/0006	0/0005	0/0006	0/0009	0/0006

جدول ۵: خسارت‌های معوق نرمال‌شدهٔ بیمهٔ شخص ثالث و مقادیر پیش‌بینی‌شدهٔ آن‌ها براساس وابستگی تقویمی و مدل تحلیل کواریانس

Table 5: The normalized outstanding claims of motor third party insurance and their predicted values in the calendar dependence model with the ANCOVA mean model

سال خسارت (Accident year)	فصل خسارت (Accident season)	(Development season lag)فصل توسعهٔ خسارت															
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1392	بهار (spring)	0/0951 (0/0697)	0/091 (0/0716)	0/1397 (0/1034)	0/2621 (0/1162)	0/0578 (0/1003)	0/0804 (0/0849)	0/0628 (0/0665)	0/0947 (0/040)	0/0128 (0/0319)	0/0169 (0/0258)	0/0161 (0/0185)	0/0152 (0/0125)	0/0045 (0/00098)	0/0037 (0/0076)	0/0042 (0/0065)	0/0035 (0/0039)
	تابستان (summer)	0/0909 (0/0725)	0/0957 (0/0746)	0/2383 (0/10783)	0/077 (0/1212)	0/1126 (0/1048)	0/0856 (0/0887)	0/1286 (0/0696)	0/0187 (0/0508)	0/0268 (0/0335)	0/0223 (0/0272)	0/0244 (0/0195)	0/0062 (0/0132)	0/0078 (0/0104)	0/0053 (0/008)	0/0057 (0/0069)	0/00035
	پاییز (fall)	0/0956 (0/0755)	0/1627 (0/0777)	0/0951 (0/1125)	0/1224 (0/1267)	0/1058 (0/1096)	0/1457 (0/0909)	0/0255 (0/0730)	0/0311 (0/0533)	0/0305 (0/0352)	0/0339 (0/0289)	0/0092 (0/0206)	0/0054 (0/0139)	0/007 (0/0110)	0/0009 (0/0085)	0/0074	0/0074
	زمستان (winter)	0/090 (0/0787)	0/0474 (0/0811)	0/086 (0/1175)	0/0893 (0/1325)	0/1449 (0/1148)	0/0265 (0/0974)	0/0384 (0/0766)	0/0298 (0/056)	0/033 (0/0371)	0/008 (0/0302)	0/0094 (0/020)	0/010 (0/0147)	0/0078 (0/0117)	0/0091	0/008	0/005
1393	بهار (spring)	0/0909 (0/0822)	0/0985 (0/0845)	0/1225 (0/1229)	0/2794 (0/1387)	0/0526 (0/1203)	0/0767 (0/1023)	0/0721 (0/0806)	0/0796 (0/0590)	0/0215 (0/0391)	0/0234 (0/0319)	0/0154 (0/2031)	0/0202 (0/0156)	0/0124	0/0097	0/0084	0/0050
	تابستان (summer)	0/0908 (0/0859)	0/0831 (0/0887)	0/252 (0/1287)	0/0745 (0/1455)	0/1045 (0/1264)	0/0936 (0/1076)	0/0983 (0/0849)	0/033 (0/0623)	0/0254 (0/0414)	0/0243 (0/0337)	0/0256 (0/0245)	0/0166	0/0132	0/0104	0/0091	0/0054
	پاییز (fall)	0/0868 (0/0896)	0/16 (0/0928)	0/0746 (0/1350)	0/1104 (0/1527)	0/1038 (0/1329)	0/1232 (0/1133)	0/0391 (0/0895)	0/04 (0/0658)	0/0338 (0/0438)	0/0402 (0/0358)	0/0260	0/0177	0/0141	0/0111	0/0097	0/0058
	زمستان (winter)	0/0963 (0/0941)	0/0431 (0/0974)	0/077 (0/1418)	0/0899 (0/1606)	0/1293 (0/1399)	0/0432 (0/1195)	0/0496 (0/0946)	0/0358 (0/0696)	0/043 (0/0464)	0/0380	0/0277	0/0189	0/0152	0/0119	0/0104	0/0062
1394	بهار (spring)	0/981 (0/0987)	0/0807 (0/1022)	0/1191 (0/1491)	0/2368 (0/1692)	0/0946 (0/1476)	0/0945 (0/1262)	0/8227 (0/1001)	0/0997 (0/0738)	0/0439	0/0405	0/0296	0/0202	0/0162	0/0128	0/0113	0/0067
	تابستان (summer)	0/0958 (0/1037)	0/0743 (0/1075)	0/208 (0/1570)	0/1155 (0/1785)	0/1232 (0/1559)	0/1066 (0/1336)	0/1482 (0/106)	0/0784	0/0525	0/0432	0/0316	0/0217	0/0175	0/0138	0/0122	0/0073
	پاییز (fall)	0/0942 (0/1091)	0/1233 (0/1133)	0/0999 (0/1657)	0/1285 (0/1886)	0/1773 (0/161)	0/1290 (0/1416)	0/1128	0/0835	0/0561	0/0462	0/0339	0/0234	0/0188	0/0149	0/0133	0/0079
	زمستان (winter)	0/0856 (0/1149)	0/049 (0/1195)	0/0794 (0/1751)	0/983 (0/1996)	0/1566 (0/1750)	0/1505	0/1201	0/0891	0/0600	0/0496	0/0365	0/0552	0/0204	0/0162	0/0145	0/0087
1395	بهار (spring)	0/0907 (0/1213)	0/0741 (0/1263)	0/1167 (0/1853)	0/2512 (0/2117)	0/1859	0/1602	0/1281	0/0953	0/0643	0/0533	0/0393	0/0273	0/0221	0/0177	0/0158	0/0095
	تابستان (summer)	0/0812 (0/1282)	0/0752 (0/1337)	0/1860 (0/1966)	0/2250	0/1979	0/1709	0/1370	0/1022	0/0692	0/0575	0/0426	0/0296	0/0241	0/0193	0/0174	0/0105
	پاییز (fall)	0/0817 (0/1357)	0/1057 (0/1418)	0/2089	0/2396	0/2112	0/1824	0/1469	0/1099	0/0746	0/0622	0/0462	0/0322	0/0005	0/0263	0/0212	0/0191
	زمستان (winter)	0/0757 (0/1440)	0/1506	0/2225	0/2577	0/2259	0/1960	0/1579	0/1185	0/0807	0/0674	0/0502	0/0352	0/0288	0/0233	0/0212	0/0128



شکل ۴: تابع چگالی توزیع پسین ذخیرهٔ کل دو رشتهٔ بیمهٔ بدنه و بیمهٔ شخص ثالث

Figure 4: Posterior distribution density of total reserve for collision and comprehension insurance and motor third party insurance

جدول ۶: میانگین و انحراف معیار توزیع پسین ذخیرهٔ کل به تفکیک دو رشتهٔ بیمه با در نظر گرفتن وابستگی تقویمی و مدل میانگین تحلیل کواریانس

Table 6: Mean and standard deviation of the posterior distribution of total reserve for both lines of insurance with the calendar dependence and ANCOVA mean model

بیمهٔ بدنه (collision and comprehension insurance)		بیمهٔ شخص ثالث (motor third party insurance)	
میانگین (Mean)	انحراف استاندارد (Standard deviation)	میانگین (Mean)	انحراف استاندارد (Standard deviation)
300560562314	155217256782	$8/591\times10^{13}$	$6/62\times10^{13}$

ذخیرهٔ خسارت‌های معوق نشان‌دهندهٔ میزان بدهی و بزرگ‌ترین منبع عدم اطمینان مالی در شرکت‌های بیمه است. ازاین‌رو، دقت در محاسبهٔ ذخیره بسیار مهم است، زیرا اگر کم برآورد شود، سبب می‌شود که شرکت بیمه نتواند تعهدات خود را به‌طور کامل انجام دهد و ممکن است سبب ورشکستگی آن شود و اگر زیاد برآورد شود سبب می‌شود که شرکت بیمه به‌صورت غیرلازم سرمایهٔ اضافی نگه دارد. با توجه به نتایج این مقاله، لحاظ کردن وابستگی بین خسارت‌های پرداخت‌شده در یک سال تقویمی، می‌تواند در پیش‌بینی دقیق‌تر خسارت‌های معوق تأثیرگذار باشد. علاوه‌براین، مدل‌بندی این وابستگی با استفاده از یک توزیع چندمتغیره در مقایسه با استفاده از اثر سال تقویمی در تابع میانگین خسارت‌ها به پیش‌بینی دقیق‌تر خسارت‌های معوق و در نتیجه محاسبهٔ دقیق‌تر ذخیرهٔ مورد نیاز شرکت‌های بیمه منجر می‌شود که باعث کاهش عدم اطمینان شرکت‌های بیمه خواهد شد. بنابراین پیشنهاد می‌شود شرکت‌های بیمه در محاسبهٔ ذخایر، علاوه‌بر در نظر گرفتن وابستگی بین مثلث‌های تأخیر رشته‌های بیمه‌ای (به‌ویژه رشته‌های بیمهٔ بدنه و شخص ثالث خودرو)، وابستگی بین خسارت‌های معوق پرداختی در یک سال تقویمی را نیز با به‌کارگیری یک توزیع چندمتغیره برای توزیع توأم آن‌ها لحاظ کنند.

مشارکت نویسندگان

افروز شکوری: مشارکت نویسنده در طراحی و حل مسئله، تجزیه‌وتحلیل داده‌ها و نگارش مقاله و محتوای کیفی با دیگر نویسندگان به‌طور یکسان است.

محی‌الدین ایزدی: مشارکت نویسنده در طراحی و حل مسئله، تجزیه‌وتحلیل داده‌ها و نگارش مقاله و محتوای کیفی با دیگر نویسندگان به‌طور یکسان است.

بهاءالدین خالدی: مشارکت نویسنده در طراحی و حل مسئله، تجزیه‌وتحلیل داده‌ها و نگارش مقاله و محتوای کیفی با دیگر نویسندگان به‌طور یکسان است.

تشکر و قدردانی

نویسندگان از داوران محترم مقاله که با پیشنهادهای ارزنده باعث بهبود مقاله شدند، قدردانی و سپاسگزاری می‌کنند.

تعارض منافع

نویسندگان اعلام می‌دارند که در خصوص انتشار این مقاله تضاد منافع وجود ندارد. علاوه‌براین، موضوعات اخلاقی شامل سرقت ادبی، رضایت آگاهانه، سوءرفتار، جعل داده‌ها، انتشار و ارسال مجدد و مکرر توسط نویسندگان رعایت شده است.

یادداشت ناشر

ناشر نشریۀ پژوهشنامۀ بیمه با توجه به مرزهای حقوقی در نقشه‌های منتشرشده بی‌طرف باقی می‌ماند.

منابع

Abdallah, A.; Boucher, J.P.; Cossette, H., (2016). Modeling dependence between loss triangles with hierarchical archimedean Copulas. Astin. Bull. J. IAA., 45(3): 577-597 **(21 Pages)**.

Abdallah, A.; Boucher, J.P.; Cossette, H.; Trufin, J., (2016). Sarmanov family of bivariate distributions for multivariate loss reserving analysis. N. Am. Actuarial. J., 20(2): 184-200 **(17 Pages)**.

Avanzi, B.; Taylor, G.; Vu, P.A.; Wong, B., (2016). Stochastic loss reserving with dependence: A flexible multivariate tweedie approach. Insur. Math. Econ., 71(2): 63-78 **(16 Pages)**.

Barnett, G.; Zehnwirth, B., (1998). Best estimates for reserves. Proc. Casualty. Actuarial. Soc., 87(167): 245-321 **(77 Pages)**.

Betancourt, M., (2017). A conceptual introduction to hamiltonian Monte Carlo. arXiv., 2: 1-60 **(60 Pages)**.

Braun, C., (2004). The prediction error of the chain ladder method applied to correlated run-off triangles. Astin. Bull. J. IAA., 34(2): 399-423 **(25 Pages)**.

Chan, J.S.; Choy, S.B.; Makov, U.E., (2008). Robust bayesian analysis of loss reserves data using the Generalized-T distribution. Astin. Bull. J. IAA., 38(1): 207-230 **(24 Pages)**.

Choy, S.T.; Chan, J.S.; Makov, U.E., (2016). Robust bayesian analysis of loss reserving data using scale mixtures distributions. J. Appl. Stat., 43(3): 396-411 **(16 Pages)**.

Choy, S.T.; Smith, A.F., (1997). On robust analysis of a normal location parameter. R. Stat. Soc., 59(2): 463-474 **(12 Pages)**.

Côté, M.P.; Genest, C.; Abdallah, A., (2016). Rank-based methods for modeling dependence between loss triangles. Eur. Actuarial. J., 6(2): 377-408 **(32 Pages)**.

De Jong, P., (2012). Modeling dependence between loss triangles. N. Am. Actuarial. J., 16(1): 74-86 **(13 Pages)**.

De Jong, P.; Zehnwirth, B., (1983). Claims reserving, state-space models and the Kalman filter. J. Inst. Actuarial., 110(1): 157-181 **(25 Pages)**.

Durante, F.; Sempi, C., (2016). Principles of Copula theory. Routledge Taylor & Francis Group.

Gelman, A.; Carlin, J.B.; Stern, H.S.; Dunson, D.B.; Vehtari, A.; Rubin, D.B., (2013). Bayesian data analysis.

Goudarzi, M.; Zokaei, M., (2018). Co-robust modeling of deferred loss storage data of body insurance and third party automobile insurance of an Iranian insurance company: A bayesian method. Iran. J. Insur. Res., 7(1): 85-107 **(23 Pages)**. [In Persian]

Goudarzi, M.; Zokaei, M., (2018). Bayesian modeling of multivariate loss reserving data based on scale mixtures of multivariate normal distributions: Estimation and case influence diagnostics. Commun. Stat. Theory. Methods., 50(21): 4934-4962 **(29 Pages)**.

Haberman, S.; Renshaw, A.E., (1996). Generalized linear models and actuarial science. J. R. Stat. Soc., 45(4): 407-436 **(30 Pages)**.

Hess, K.T.; Schmidt, K.D.; Zocher, M., (2006). Multivariate loss prediction in the multivariate additive model. Insur. Math. Econ., 39(2): 185-191 **(7 Pages)**.

Merz, M.; Wüthrich, M.V.; Hashorva, E., (2013). Dependence modelling in multivariate claims run-off triangles. Anal. Actuarial. Sci., 7(1): 3-25 **(23 Pages)**.

Nelsen, R.B., (2006). An introduction to Copulas. Springer New York, NY.

Ntzoufras, I.; Dellaportas, P., (2002). Bayesian modelling of outstanding liabilities incorporating claim count uncertainty. N. Am. Actuarial. J., 6(1): 113-125 **(13 Pages)**.

Renshaw, A.E., (1989). Chain ladder and interactive modelling (Claims reserving and GLIM). J. Inst. Actuarial., 116(3): 559-587 **(29 Pages)**.

Renshaw, A.E.; Verrall, R.J., (1998). A stochastic model underlying the chain-ladder technique. Br. Actuarial. J., 4(4): 903-923 **(21 Pages)**.

Shakoori, A.; Izadi, M.; Khaledi, B.E., (2022). Copula based bayesian data analysis of loss reserving. Commun. Stat. Simul. Comput., 1-17 **(17 Pages)**.

Shi, P.; Basu, S.; Meyers, G.G., (2012). A bayesian log-normal model for multivariate loss reserving. N. Am. Actuarial. J., 16(1): 29-51 **(23 Pages)**.

Shi, P.; Frees, E.W., (2011). Dependent loss reserving using Copulas. Astin. Bull. J. IAA., 41(2): 449-486 **(38 Pages)**.

Sklar, M. , (1959). Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. Ann. l'ISup., 8(3): 229-231 **(3 Pages)**.

Verrall, R.J., (1989). A state space representation of the chain ladder linear model. J. Inst. Actuarial., 116(3): 589-609 **(21 Pages)**.

Verrall, R.J., (1996). Claims reserving and generalised additive models. Insur. Math. Econ., 19(1): 31-43 **(13 Pages)**.

AUTHOR(S) BIOSKETCHES — **معرفی نویسندگان**

افروز شکوری، دانشجوی دکتری آمار، گروه آمار، دانشکدهٔ علوم، دانشگاه رازی، کرمانشاه، ایران

- Email: *Afruz.shakuri4@yahoo.com*
- ORCID: 0000-0002-8449-7258
- Homepage: https://sci.razi.ac.ir/

محی‌الدین ایزدی، استادیار آمار، گروه آمار، دانشکدهٔ علوم، دانشگاه رازی، کرمانشاه، ایران

- Email: *m.izadi@razi.ac.ir*
- ORCID: 0000-0001-6725-3449
- Homepage: https://sci.razi.ac.ir/~izadi_552

بهاءالدین خالدی، استاد آمار، گروه آمار کاربردی و روش‌های تحقیق، دانشگاه کلرادوی شمالی، گریلی، کلرادو، آمریکا

- Email: *Bahaedin.khaledi@unco.edu*
- ORCID: 0000-0002-1294-9251
- Homepage: https://scholar.google.com/citations?user=nvZXh4wAAAAJ&hl=en

HOW TO CITE THIS ARTICLE

Shakoori, A.; Izadi, M.; Khaledi, B., (2023). Modeling outstanding claims in dependent run-off triangles considering calendar dependence. Iran. J. Insur .Res., 12(4): 283-298.

DOI: 10.22056/ijir.2023.04.03

URL: https://ijir.irc.ac.ir/article_160301.html?lang=en