Iran. J. Insur. Res., 12(3): 197-212, Summer 2023, Serial #45

Iranian Journal of Insurance Research
(IJIR)

Homepage: https://ijir.irc.ac.ir/?lang=en

Insurance Research Center (IRC)

ORIGINAL RESEARCH PAPER

Pricing of life insurance products using markovian aging process model

A. Rostami*, A. HassanZadeh

Department of Actuarial Science, Faculty of Mathematics, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran

ARTICLE INFO

Article History:
Received 12 February 2023
Revised 05 May 2023
Accepted 04 June 2023

Keywords:
Aging process
Markov process
Mortality prediction
Physiological age
Pricing

*Corresponding Author:
Email: *ar_rostami@sbu.ac.ir*
Phone: +9821 88554101
ORCID: 0000-0002-3754-420X

ABSTRACT

BACKGROUND AND OBJECTIVES: In this research, our main objective is more accurate pricing of life insurance products with a new approach of predicting mortality or survival rates. Currently, a life table is used to calculate the current value of pensions, insurance premiums, etc. Therefore, to increase the accuracy of our calculations, we are looking for a mortality prediction model for such calculations. Therefore, in this research, instead of static pricing (only using the latest life table), we used life table prediction and dynamically rated life insurance products.

METHODS: In this research, a new model proposed to predict the probability of human mortality (survival) based on the Markov process, a limited state with an absorption state (death). This model measured based on the physiological age, because the physiological age of each person can be checked based on different laboratory indicators, and finally it has led to the results of the individual health index. In addition, the parameters of this model are the initial probability vector and the sub-intensity matrix of a Markov chain that changes over time. In other words, in this model, according to a possible process in the model, the initial probability vector over time selects the possible interval of the physiological age equivalent to the chronological age.

FINDINGS: To show the satisfactory performance of this model, the relevant data set from the United States of America was analyzed. The predicted results with the presented model are better than Lee Carter's model. It should be noted that the number of parameters of the model introduced in this research is much less compared to the Lee Carter model and other mortality or survival prediction models. Based on this model, a closed form for life insurance pricing relationships is obtained, which simplifies these calculations for users.

CONCLUSION: The relationships obtained for pricing were investigated based on two products, 5-year term life insurance and also a 5-year term pension. The fitted results for the model used in the predictions of the probability of mortality as well as the probability of survival and pricing are very satisfactory.

DOI: 10.22056/ijir.2023.03.03

نشریه علمی پژوهشنامه بیمه

سایت نشریه: https://ijir.irc.ac.ir/?lang=fa

مقاله علمی

قیمت‌گذاری محصولات بیمه زندگی با استفاده از مدل فرایند پیری مارکوفی

آرمان رستمی*، امین حسن‌زاده

گروه بیم‌سنجی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران

اطلاعات مقاله

تاریخ های مقاله:

تاریخ دریافت: ۲۳ بهمن ۱۴۰۱

تاریخ داوری: ۱۵ اردیبهشت ۱۴۰۲

تاریخ پذیرش: ۱۴ خرداد ۱۴۰۲

کلمات کلیدی:

پیش‌بینی مرگ‌ومیر

سن فیزیولوژیکی

فرآیند پیری

فرآیند مارکوف

قیمت‌گذاری

***نویسنده مسئول:**

ایمیل: *ar_rostami@sbu.ac.ir*

تلفن: ۰۲۱۸۸۵۵۴۱۰۱+

ORCID: 0000-0002-3754-420X

چکیده:

پیشینه و اهداف: در این پژوهش، هدف قیمت‌گذاری دقیق‌تر محصولات بیمه زندگی با رویکرد جدیدی از پیش‌بینی نرخ مرگ‌ومیر و یا بقا است. در حال حاضر برای محاسبه ارزش فعلی مستمری‌ها، حق بیمه‌ها و... از یک جدول عمر استفاده می‌شود. بنابراین برای بالابردن دقت محاسبات ما به دنبال استفاده از یک مدل پیش‌بینی مرگ‌ومیر در محاسبات هستیم. لذا در این پژوهش به‌نحوی به‌جای نرخ‌گذاری ایستا (صرفاً استفاده از آخرین جدول عمر) از پیش‌بینی جدول عمر استفاده شده و نرخ‌گذاری محصولات بیمه زندگی به‌صورت پویا انجام شده است.

روش‌شناسی: ما یک مدل جدید برای پیش‌بینی احتمال مرگ‌ومیر (بقا) انسان براساس فرایند مارکوف حالت محدود با یک حالت جذب (مرگ) پیشنهاد می‌کنیم. این مدل براساس سن فیزیولوژیکی است، سن فیزیولوژیکی هر فرد براساس شاخص‌های متفاوت آزمایشگاهی قابل‌بررسی است که منجر به نتایج شاخص سلامت فردی می‌شود. علاوه بر این، پارامترهای این مدل بردار احتمال اولیه و ماتریس زیر شدت یک زنجیره مارکوف است که در طول زمان تغییر می‌کند. به‌عبارت دیگر با توجه به یک فرایند احتمالی در مدل، بردار احتمال اولیه در طول زمان بازه احتمالی سن فیزولوژیکی معادل سن تقویمی را انتخاب می‌کند.

یافته‌ها: برای نشان‌دادن عملکرد رضایت‌بخش مدل، مجموعه‌داده‌های ایالات متحده مورد تجزیه‌وتحلیل قرار گرفته که نتایج پیش‌بینی مدل ارائه‌شده بهتر از مدل لی کارتر است. قابل‌ذکر است که تعداد پارامترهای مدل معرفی‌شده در این پژوهش در مقایسه با مدل لی کارتر و سایر مدل‌های پیش‌بینی مرگ‌ومیر و یا بقا بسیار کمتر است. براساس این مدل، فرم بسته برای روابط قیمت‌گذاری بیمه زندگی به دست می‌آید که این محاسبات را برای کاربران ساده می‌کند.

نتیجه‌گیری: روابط به‌دست‌آمده برای قیمت‌گذاری، براساس دو محصول ـ بیمه زندگی مدت‌دار ۵ ساله و همچنین یک مستمری مدت‌دار ۵ ساله ـ مورد بررسی قرار گرفته و نتایج ارائه شده است. نتایج برازش مدل، پیش‌بینی‌های احتمال مرگ‌ومیر و همچنین احتمال بقا و قیمت‌گذاری بسیار رضایت‌بخش هستند.

DOI: 10.22056/ijir.2023.03.03

توجه: مدت زمان بحث و انتقاد برای این مقاله تا ۱ اکتبر ۲۰۲۳ در وب‌سایت IJIR در «نمایش مقاله» باز می‌باشد.

مقدمه

محاسبه ارزش فعلی آکچوئریای (Actuarial Present Value) در شاخه‌های متفاوت علوم بیم‌سنجی همچون بیمه‌های زندگی، مستمری، صندوق‌های بازنشستگی و .... حائز اهمیت است. در این راستا محاسبات ارزش‌گذاری محصولات تجاری بیمه زندگی و ... همچنین ارزیابی صندوق‌های بازنشستگی همواره یک چالش مهم برای بیم‌سنج‌ها بوده است. بیمه عمر و مستمری، قرارداد مالی با هدف ایجاد سرمایه در حمایت از بازماندگان یا پرداخت تعهدات در صورت فوت است. با بیمه عمر، فرد می‌تواند سرمایه‌ای برای خانواده در صورت فوت خود ایجاد کند. چنین سرمایه‌ای ممکن است به‌منظورتأمین هزینه تحصیل فرزندان، تأمین اقساط وام و یا تأمین معیشت همسر صورت گیرد. بنابراین مستمری عمر دنباله‌ای از پرداخت‌ها است که با فواصل مساوی در طول عمر آتیه فرد به وی پرداخت می‌شوند (Olivieri and Pitacco, 2015; Lehtomaa, 2021). بسیاری از مردم در دوران بازنشستگی مستمری می‌خرند، مثلاً قصد دارند تا مبالغی مشخص مانند وضعیتی که استخدام بودند دریافت کنند. مستمری‌های عمر نقش مهمی در مدیریت مستمری‌ها و برنامه‌ریزی وضعیت آینده شخص ایفا می‌کنند. حق بیمه وجوه پرداختی طبق شرایط بیمه‌نامه جهت برخورداری از پوشش بیمه‌ای است. در حق بیمه‌های خالص فقط سود و مرگ‌ومیر با هدف پوشش هزینه‌های خالص بیمه لحاظ می‌شوند. حق بیمه‌هایی که شرکت‌های بیمه مطالبه می‌کنند هزینه‌های سربار، بودجه احتیاطی جهت پوشش سایر ریسک‌های محتمل و همچنین سود را شامل می‌شود که حق بیمه ناخالص یا اداری نامیده می‌شود (Gerber, 1990; Embrechts and Klüppelberg, 1994). البته مقادیر محاسبه‌شده در این پژوهش براساس حق بیمه خالص بوده و در صورت نیاز به به‌دست‌آوردن حق بیمه ناخالص کافی است براساس آیین‌نامه ۶۸ بیمه مرکزی هزینه‌های سربار در حق بیمه خالص اعمال شود.

دو عامل مؤثر در محاسبه ارزش فعلی آکچوئریایی، نرخ‌های مرگ‌ومیر (بقا) و همچنین نرخ تنزیل می‌باشد. بیم‌سنج‌ها در گذشته با یک نرخ تنزیل ثابت در طول زمان و یک جدول عمر (Life Table) که عموماً آخرین جدول عمر به‌روزشده جامعه موردمطالعه بوده، ارزش فعلی آکچوئریایی پرداخت‌های آتی را محاسبه می‌کردند (Norberg, 2002; Moller and Steffensen, 2007). ازاین‌رو محققان در سال‌های اخیر در کوشش بودند که محاسبات ارزش‌گذاری‌های دقیق‌تری را ارائه بدهند. در مبحث نرخ تنزیل، محققان مقالات متعددی برای تصادفی‌بودن نرخ تنزیل ارائه کرده‌اند، در این میان می‌توان به Liu (2013) اشاره کرد که با استفاده از مدل تصادفی پیش‌بینی نرخ تنزیل یک نرخ‌گذاری جدید در این زمینه ارائه کرد. اخیراً Sharma *et al.* (2022) براساس مدل فرایند وینر جهت پیش‌بینی نرخ تنزیل و همچنین اثر مدل مرگ‌ومیر لی کارتر برای نرخ مرگ‌ومیر نتایج جدیدی را ارائه کردند.

ریاضیات بیمه عمر با تحلیل و مدیریت ریسک‌های مالی مربوطه با احتمالات بقا و یا فوت سروکار دارد. مدل‌های بقای استفاده‌شده در بیمه عمر و مستمری اغلب مربوط به دوره حیات فرد است. برای مثال، درمورد بیمه تمام‌عمر ساده مزایای پرداختی توسط شرکت بیمه در لحظه فوت بیمه‌شده صورت می‌گیرد. برای تعیین نرخ چنین محصول‌های بیمه‌ای، شرکت‌های بیمه به محاسبات ارزش فعلی مزایای پرداختی می‌پردازند، چون پرداخت‌ها در زمان آینده صورت می‌گیرد بنابراین مقدار مزایا باید با نرخ بهره مفروض تنزیل شود. بنابراین در بیمه‌های عمر و مستمری زمان پرداخت‌ها اغلب به طول عمر فرد بستگی دارد، لذا توزیع احتمال طول عمر بیمه‌شده احتمالاً باید با یک مدل بقا برآورد شود.(Norberg, 2014; Anderson, 2006)

اولین بیم‌سنج‌ها به‌وسیله شرکت‌های بیمه عمر در اوایل قرن هجدهم میلادی استخدام شده بودند تا یک پایه علمی برای مدیریت دارایی‌ها و تعهدات شرکت‌ها فراهم کنند، بدیهی است تعهدات به تعداد مرگ‌ومیرهای افراد بیمه‌شده بستگی داشت. مدل‌بندی مرگ‌ومیر هم در زمینه تجاری و هم برای عموم به یک موضوع علمی جالب تبدیل گردید و تعداد قابل‌توجهی از دانشمندان و ریاضیدانان را به سوی مسائل آکچوئری جذب کرد که درنتیجه بسیاری از کارهای اخیر در زمینه احتمالات با توسعه جواب‌های مسائل آکچوئری کاملاً در ارتباط بود (Laurent *et al.*, 2016). بیمه‌نامه‌های عمر به این صورت بودند که بیمه‌گذار بایستی مبلغی را تحت عنوان حق بیمه به بیمه‌گر پرداخت می‌کرد اگر بیمه‌شده مذکور در سالی که قرارداد در جریان بود فوت می‌کرد، بیمه‌گر بایستی مبلغ تجمعی ازپیش‌تعیین‌شده سرمایه فوت را به بیمه‌گذار یا ذی‌نفعش پرداخت می‌کرد. بنابراین اولین قراردادهای بیمه عمر به‌صورت قراردادهای سالیانه بودند. هر سال به‌دلیل افزایش احتمال مرگ، حق بیمه بایستی افزایش می‌یافت. اگر فرد بیمه‌شده در تاریخ تمدید قرارداد به‌شدت بیمار می‌شد قرارداد بیمه تمدید نمی‌شد و در چنین حالتی به فرد بیمه‌شده در ازای مدتی که فوتش به تأخیر افتاده هیچ نفعی تعلق نمی‌گرفت. به ازای تعداد زیادی از قراردادها حق بیمه‌های دریافتی سالیانه بایستی به‌طور تقریبی با مطالبات پرداختی برابر باشند که این روش تطابق درآمدها و مخارج به‌صورت سالیانه بدون هیچ‌گونه سعی در هموارسازی‌ها یا تعدیل بیمه‌ها در طول سال ارزیابی می‌شوند. این روش هنوز هم برای بیمه‌های عمر گروهی که در آن کارفرما پوشش بیمه عمر را برای کارمندان خود بر مبنای سال‌به‌سال خریداری می‌کند استفاده می‌شود (Asmussen and Steffensen, 2020; Fischer, 2007).

در مورد فرد بیمه‌شده با وضعیت سلامتی خاص، احتمالات بقا و مرگ‌ومیر استاندارد باید تعدیل شود. بنابراین، فرد باید گواهینامه‌ای از ارزیاب وضعیت سلامتی در خصوص جدول مرگ‌ومیر مربوط به پرونده خود دریافت کند. ارزیاب وضعیت سلامتی از سابقه پزشکی بیمه‌شده که در فرم سلامت منعکس می‌شود استفاده می‌کند؛ و در صورتی که تشخیص وضعیت سلامتی بیمه‌شده به تجزیه‌وتحلیل و گزارش‌های بالینی خاصی نیاز داشته باشد، اظهارنامه‌ای را تکمیل می‌کند. پس از دریافت این ورودی‌ها، ارزیاب وضعیت سلامتی باید بیان کند که میزان مرگ‌ومیر متقاضی تا چه اندازه با استاندارد

متفاوت است. بنابراین، ارزیاب وضعیت سلامتی درنهایت، از یک جدول استاندارد مرگ‌ومیر، جدول تعدیل شده دیگری را به‌دست می‌آورد که با وضعیت سلامت شخصی و سبک زندگی فرد بیمه‌شده و امید زندگی مربوط به وی سازگار است. برای اطلاعات بیشتر می‌توان به (Aalaei, 2023) مراجعه کرد.

بیم‌سنج‌ها برای قیمت‌گذاری مستمری‌های زندگی باید نااطمینانی پیشامدهای جمعیتی و متغیرهای مالی را مدل‌سازی کنند. در ریاضیات بیمه زندگی استاندارد نا اطمینانی تصادفی پدیده‌های جمعیتی مورد توجه قرار گرفته و احتمالات مربوطه از جدول عمر به دست می‌آید. در کلیه مقالات بیم‌سنجی در حوزه قیمت‌گذاری تصادفی بودن ارزش حال حق بیمه‌ها و منافع بیمه‌نامه به صورت امید ریاضی آنها بیان شده و به این ترتیب فرآیند قطعی و معین می‌شود. این رویکرد امکان قیمت‌گذاری قراردادهای بیمه با توجه به نوع اطمینانی متغیر های مالی و جمعیتی را فراهم می‌کند. برای اطلاعات بیشتر می‌توان به (Komijani, *et al.,* 2015) مراجعه کرد.

پیشرفت اساسی در اواخر قرن هجدهم قراردادهای با حق بیمه‌های یکسان بودند. مشکل در این بود که افزایش سالیانه حق بیمه‌ها بیمه‌گذار را از تمدید قراردادها دلسرد می‌کرد. با حق بیمه یکسان به بیمه‌گذار این اختیار را می داد که خود را برای حق بیمه منظم و قابل‌پرداخت به‌صورت هفتگی، ماهیانه، سه‌ماهه و یا سالیانه برای چندین سال محدود کند. این حالت خیلی بیشتر موردعلاقه بیمه‌گرها بود، چراکه آنان نمی‌خواستند فراتر از طرف قرارداد بیمه پول بپردازند مگر زمانی که واقعاً لازم بود. از آنجا که در قراردادهای بلندمدت بیمه‌گذار به احتمال زیاد برای دوره طولانی حق بیمه پرداخت می‌کرد، این قراردادها برای بیمه‌گر جذاب بود اما مشکل بیمه‌گر این بود که مدل‌بندی قراردادهای بلندمدت بسیار پیچیده و ریسک بالایی داشت. برای این قراردادها تکنیک‌های آکچوئری بایستی بیشتر از مدل‌بندی سال‌به‌سال احتمال‌های مرگ‌ومیر پیشرفت می‌کرد و همچنین لازم بود مفروضات مالی نیز در مدل‌بندی درآمد و هزینه در نظر گرفته شود. بنابراین برای یک قرارداد یکساله ارزش زمانی پول موضوع بحرانی نیست اما مثلاً برای قرارداد ۳۰ ساله این مسئله بخش عمده‌ای از مدل‌بندی است (Hald, 1987).

اولین بررسی‌های مرگ‌ومیر در قالب جدول‌های عمر به‌وسیله جان گرنت و ادموند هالی انجام شدند. جدول عمر به‌طور خلاصه یک مدل بقا را با تعیین نسبت افراد زنده که انتظار می‌رود به هر سنی برسند، بیان می‌کند. برای مثال گرنت با استفاده از اطلاعات مرگ‌ومیر لندن از اوایل قرن هفدهم برای حالتی که فرد تازه‌متولدشده به سن ۱۶ سالگی برسد احتمال ۴۰ درصد و برای حالتی که این فرد به سن ۷۶ سالگی باشد احتمال یک درصد را پیشنهاد کرد (برای اطلاعات بیشتر می توان به Dickson and et al. (2019) مراجعه کرد).

محققان همواره در تلاش معرفی مدل‌سازی جدید برای نرخ مرگ‌ومیر بوده‌اند. آبراهام دی‌مواور در سال ۱۷۲۵ اولین مدل براساس توزیع یکنواخت را معرفی کرد. پس از آن در سال ۱۸۲۵ گومپرتز مدلی براساس نیروی مرگ‌ومیر ارائه کرد. پس ازگومپرتز مدل‌های زیادی ارائه شد که مشهورترین آن‌ها مدل ۸ پارامتری هلیگمن پولار در سال ۱۹۸۰ بوده است که برای رده‌های سنی متفاوت نحوه تفسیر پارامترها قابل‌توجه است. برای اطلاعات بیشتر درباره مدل‌های مرگ‌و میر گذشته می‌توان به Tabeau *et al.* (2001) مراجعه کرد.

مدل‌های معرفی‌شده فوق صرفاً داده مرگ‌ومیر یک جدول را مدل می‌کنند. در سال ۱۹۹۲ برای اولین بار Lee and Carter (1992) مدل مشهور خود را برای فرمول‌بندی و پیش‌بینی مرگ‌ومیر براساس میزان مرگ‌ومیر هر سن معرفی کردند.

پس از آن در سال ۲۰۰۶ Renshaw and Heberman (2006) اثر کوهورت (نسلی) را به مدل لی کارتر اضافه کردند. محققان اثرات متفاوتی در مدل لی کارتر اضافه کرده و مدل‌های متفاوتی را ارائه کردند که هرکدام از این مدل‌ها معایب و مزایایی دارند. برای اطلاعات بیشتر می توان به Cairns *et al.* (2011) مراجعه کرد.

در این پژوهش ابتدا براساس توزیع‌های فاز نوع(Phase Type Distributions) و با توسعه مدل Lin and Liu (2007) یک روش برای مدل‌سازی و پیش‌بینی نرخ‌های مرگ‌ومیر (بقا) ارائه می‌کنیم، سپس در راستای محاسبه ارزش فعلی آکچوئریایی براساس یک مدل پیش‌بینی مرگ‌ومیر عمل می‌کنیم، به‌عبارت دیگر، با درنظرگرفتن نرخ ثابت تنزیل و پیش‌بینی مرگ‌ومیر براساس مدل معرفی‌شده در بخش سوم نتایج حاصل و قابل‌مقایسه خواهد بود. یکی از مزیت‌های روش موردبررسی در این مقاله فارغ از پیش‌بینی بهتر نسبت به مدل لی کارتر، فرم بسته فرمول‌های ارزش فعلی آکچوئریایی است.

بنابراین در این پژوهش ما با استفاده از روش‌هایی که در ادامه بیان می‌کنیم و با توسعه مدل Lin and Liu (2007)، یک مدل برمبنای توانایی پیش‌بینی و تولید جدول عمر برای احتمالات مرگ‌ومیر آینده را معرفی کرده و این در حالی است که مدل بیان‌شده در Lin and Liu (2007) صرفاً براساس داده‌های یک سال برقرار است و توانایی پیش‌بینی ندارد؛ به‌عبارت دیگر با استفاده از برازش داده‌های چند سال، جداول عمر سال‌های آتی را پیش‌بینی می‌کنیم.

ساختار کلی مقاله به این صورت است که توزیع فاز نوع در بخش دوم توضیح داده می‌شود. در بخش سوم مدل مرگ‌ومیر برپایه توزیع فاز نوع ارائه می‌گردد. بخش چهارم به دو زیربخش تقسیم می شود که در زیربخش اول برازش مدل و در زیربخش دوم نتایج پیش‌بینی و همچنین مقایسه با مدل لی کارتر ارائه می‌گردد و در بخش پنجم فرمول‌های ارزش فعلی آکچوئریایی معرفی و نتایج به‌دست‌آمده ارائه می‌گردد. در پایان نتیجه‌گیری در بخش ششم ارائه می‌گردد.

توزیع فاز نوع

توزیع‌های فاز نوع در گستره وسیعی از مدل‌بندی‌های تصادفی مانند مخابرات، آمار زیستی، نظریه صف و ... کاربرد دارند. توزیع‌های فاز نوع اولین‌بار توسط نیوتس در سال ۱۹۷۵ معرفی شد که تعریف وی از متغیر تصادفی فاز نوع عنوان مدت‌زمان موردنیاز تا جذب در یک وضعیت جاذب در زنجیره مارکوف زمان متناهی با فضای وضعیت متناهی بود.

Latouche and Ramaswami (1999) یک متغیر تصادفی از توزیع فاز نوع پیروی می‌کند، هرگاه به‌عنوان زمان جذب در یک زنجیره مارکوف زمان پیوسته $\{X_t, t \geq 0\}$ با تعداد متناهی وضعیت گذرا $\{1,2,\dots n\}$ و یک وضعیت جاذب صفر نمایش داده می‌شود. به‌طور کلی توزیع‌های فاز نوع با یک بردار خطی از احتمال‌های α که از هر وضعیت دلخواه آغاز شده و یک ماتریس Tکه نرخ بی‌درنگ تغییر وضعیت‌ها است مشخص می‌شود. بنابراین این توزیع زمان X تا جذب‌شدن در وضعیت جاذب توزیع فاز نوع با نمایش (α, T) را دارد. در این حالت یک فرایند مارکوف روی وضعیت‌های $\{0,1,2,\dots n\}$ با بردار احتمال اولیه (α_0, α) و ماتریس شدت Q در شکل بلوکی

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ t_0 & T \end{bmatrix}$$

تعریف می‌شود که $T = [t_{ij}]$ یک ماتریس زیر شدت n بعدی به‌صورت زیر خواهد بود:

$$t_{ii} < 0 \;, \quad t_i \geq 0 \quad ; \quad i = 1,2,\dots,n$$
$$t_{ij} \geq 0 \quad ; \quad i = 1 \leq i \neq j \leq n$$
$$T\mathbf{1} + t_0 = \mathbf{0}$$

که در اینجا ۱ بردار ستونی n بعدی از یک‌ها است.

قضیه ۲،۱ : ماتریس شدت Q را در نظر بگیرید، در این صورت:

$$\exp(Qs) = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ 1 - e^{ts} & e^{Ts} \end{bmatrix} \tag{۱}$$

برهان: شدت Q را در نظر بگیرید، در این صورت براساس :Latouche and Ramaswami, (1999)

$$\exp(Qs) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Qs)^k}{k!}$$

از طرفی می‌توان Q را به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ -T\mathbf{1} & T \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad Q^n = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ -T^n\mathbf{1} & T^n \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$\exp(Qs) = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ 0 & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ -st & sT \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ -\frac{s^2t^2}{2!}\mathbf{1} & \frac{s^2T^2}{2!} \end{bmatrix} + \cdots$$

$$\Rightarrow \exp(Qs) = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ -\left(st + \frac{s^2t^2}{2!} + \cdots\right)\mathbf{1} & \left(I + sT + \frac{s^2T^2}{2!} + \cdots\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ 1 - e^{ts} & e^{Ts} \end{bmatrix}$$

و قضیه اثبات می‌شود.

در ادامه تابع توزیع، تابع چگالی، تبدیل لاپلاس و گشتاورهای توزیع فاز نوع به‌صورت زیر معرفی می‌شود:

- تابع توزیع:

$$F(h) = 1 - \alpha \exp(Th)\,\mathbf{1} \qquad ; h \geq 0 \tag{۲}$$

- تابع چگالی:

$$f(h) = 1 - \alpha \exp(Th)\,(-T)\mathbf{1} \qquad ; h > 0 \tag{۳}$$

- تبدیل لاپلاس:

$$L(s) = \alpha(sI - T)^{-1}(-T)\mathbf{1} \qquad ; Re(s) \geq 0 \tag{۴}$$

- گشتاورها:

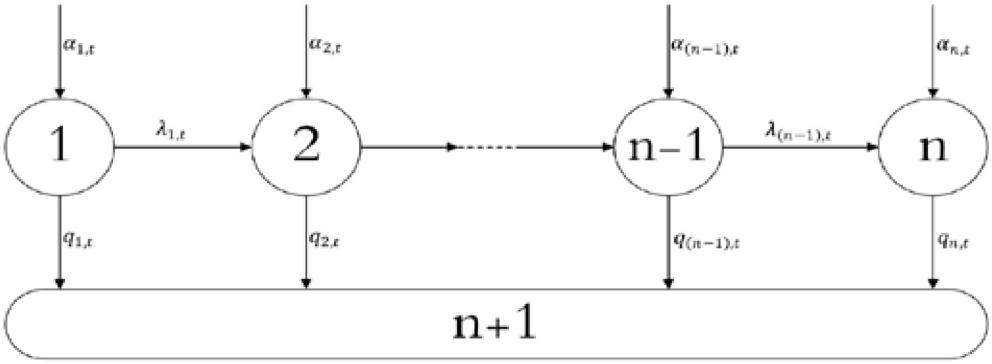
$$m_k = (-1)^k k!\, \alpha(T)^{-k}\mathbf{1} \qquad ; k \in \mathbb{N} \tag{۵}$$

برای اطلاعات بیشتر در مورد این توزیع‌ها می‌توان به Latouche and Ramaswami (1999) و Neuts (1994) مراجعه کرد.

مدل

در این بخش مدل پیش‌بینی و تناسب نرخ مرگ‌ومیر معرفی می‌گردد. در این مدل برخلاف مدل Lee and Carter (1992) ما به‌جای سن تقویمی از سن فیزیولوژیکی استفاده کرده و سپس نتایج را به سن تقویمی تبدیل می‌کنیم. واضح است که پیری انسان با طیف گسترده‌ای از تغییرات فیزیولوژیکی مرتبط است؛ مانند: کاهش شدت فشار خون در میان بافت‌های مختلف، اختلالات متابولیسم چربی، کم‌شدن تراکم استخوان و ... چنین تغییراتی نه تنها انسان را در معرض بیماری‌های بسیاری قرار می‌دهد، بلکه باعث افزایش قابلیت مردن در فرد می‌شود.

سن فیزیولوژیکی براساس سنجه‌های متفاوتی برای هر فرد اندازه‌گیری می‌شود . بدیهی است که سن تقویمی و فیزیولوژیکی یکسان نیست. می‌توان ادعا کرد که ازآنجایی‌که سن فیزیولوژیکی به‌طور دقیق‌تری سلامت فرد را مشخص می‌کند، مدل‌سازی بقا براساس سن فیزیولوژیکی منجر به مدل سازگارتری می‌شود. در این مقاله یک سن فیزیولوژیکی فرضی را معرفی می‌کنیم که یک تغییر فیزیولوژیکی قابل‌کشف را در نتیجه یک یا چند تابع فیزیولوژیکی مزبور نشان می‌دهد. این سن فیزیولوژیکی می‌تواند همانند یک شاخص سلامتی تعبیر شود که درجه پیری در بدن انسان را نشان می‌دهد. برخلاف بعضی از مدل‌های مرگ‌ومیر که روی فاکتورهای سلامتی خاص و ارتباط‌های آن‌ها با مرگ‌ومیر تمرکز می‌کنند، سن فیزیولوژیکی را در یک سطح بنیادی تعریف می‌کنیم و همچنین فرض می‌کنیم که آن فقط در یک جهت توسعه داده شده است.(Shojaee Azar and Hassan Zadah, 2014)



شکل ۱: فرایند پیری فیزیولوژیکی مارکوفی پیشنهادی
Fig. 1: Proposed Markovian physiological aging process

ازآنجایی‌که ویژگی خطی به‌وسیله تابع‌های فیزیولوژیکی مختلف حفظ می‌شوند، پس فرض می‌کنیم که خطی‌بودن نیز در طول زمان با سن‌های فیزیولوژیکی حفظ شود، به‌علاوه تغییر موقعیت‌های سلامتی یا انتقال از یک سن فیزیولوژیکی به سن بعدی تصادفی است که اساساً متفاوت از سن تقویمی بوده و در پایان می‌توان گفت که مرگ‌ومیر دیده‌شده هم انعکاس طبیعی از فرایند پیری و هم پاسخی به فاکتورهای محیطی است .اثر متقابل بین فرایند پیری درونی و فاکتورهای بیرونی مرگ، همان قابلیت استعداد توصیف‌شده در تعریف پیری است. به‌عبارت دیگر با افزایش سن فیزیولوژیکی، ظرفیت فیزیولوژیکی کاهش می‌یابد که این امر حاکی از افزایش استعداد ابتلا به بیماری‌های مهلک و کشنده است (Gavrilov and Gavrilova, 1992).

با توجه به اینکه مدل ما مبتنی بر فرایند پیری مارکوف است، حالت i در فرایند J نشان‌دهنده سن فیزیولوژیکی مارکوفی i است. رویکرد ذکرشده در (Lin and Liu, 2007) با مدل ایجادشده در شکل ۱ توسعه یافته است.

مشتریانِ محصولات ارائه‌شده در طرح‌های بیمه زندگی و مستمری عموماً بالای ۳۰ سال سن دارند (Asmussen *et al.*, 2019; Hardy, 2003). بنابراین فرض می‌شود که سن موردنظر در این شرایط $x > 0$ باشد. در ادامه توزیعی را برای سن فیزیولوژیکی مارکوفی یک فرد در سن x برازش می‌دهیم. بدیهی است که با توجه به پیشرفت بهداشت و سلامت جامعه انتظار داشته باشیم سن فیزیولوژیکی یک فرد $x > 0$ ساله در سال‌های آتی کاهش یابد. به‌عنوان مثال انتظار داریم سن فیزیولوژیکی یک فرد ۳۰ ساله در سال ۱۹۹۰ بیشتر از سال ۲۰۱۰ باشد.

بنابراین برخلاف دیدگاه لین و لیو در توزیع فاز نوع $\alpha = (1,0,0,\dots,0)$ است. در اینجا فرض می‌کنیم α_t دارای توزیع دو جمله‌ای با پارامترهای $(n, p * k(t))$ است. (چراکه فرایند از سن صفر سالگی تقویمی شروع نمی‌شود و فقط در سن صفر سالگی است که سن تقویمی با فیزیولژیکی برابر است) که در اینجا $k(t)$ پارامتر شاخص زمانی است. البته نتایج حاصل طبق این فرض با نتایج لین و لیو در حالتی که فرایند از سنی غیر از صفر شروع شود مطابقت دارد و همچنین سازوکار ساده‌تری در اینجا ارائه شده است.از طرف دیگر، در مقایسه با رویکرد(Asghari and Hassan Zadeh, (2019، این فرض محاسبات را به‌شدت ساده‌تر می کند. در Lin and Liu (2007) نیز بعد از برازش کل داده‌ها از سن ۰ تا آخرین سن (چون فقط در سن صفر سالگی، سن تقویمی و فیزیولوژیکی برابر است) برای همان سال براساس یک امیدگیری شرطی بازه سن فیزیولوژیکی سایر سن‌های تقویمی را تخمین می‌زند و این در حالی است که در این پژوهش با یک سازوکار جدید (ایجاد توزیع احتمال برای بردار احتمال اولیه) مشکل تشخیص بازه سنی فیزیولوژیکی برای سن تقویمی را که در Lin and Liu (2007) به‌صورت دستی است حل کرده‌ایم و در مقاله ما به‌صورت یک الگوریتم در هر سال براساس فرایند بهینه‌سازی مشخص می‌شود و مهم‌تر از آن مدل ما قابلیت‌پیش‌بینی نیز خواهد داشت.

ماتریس زیرشدت مورداستفاده در مدل به‌صورت زیر است:

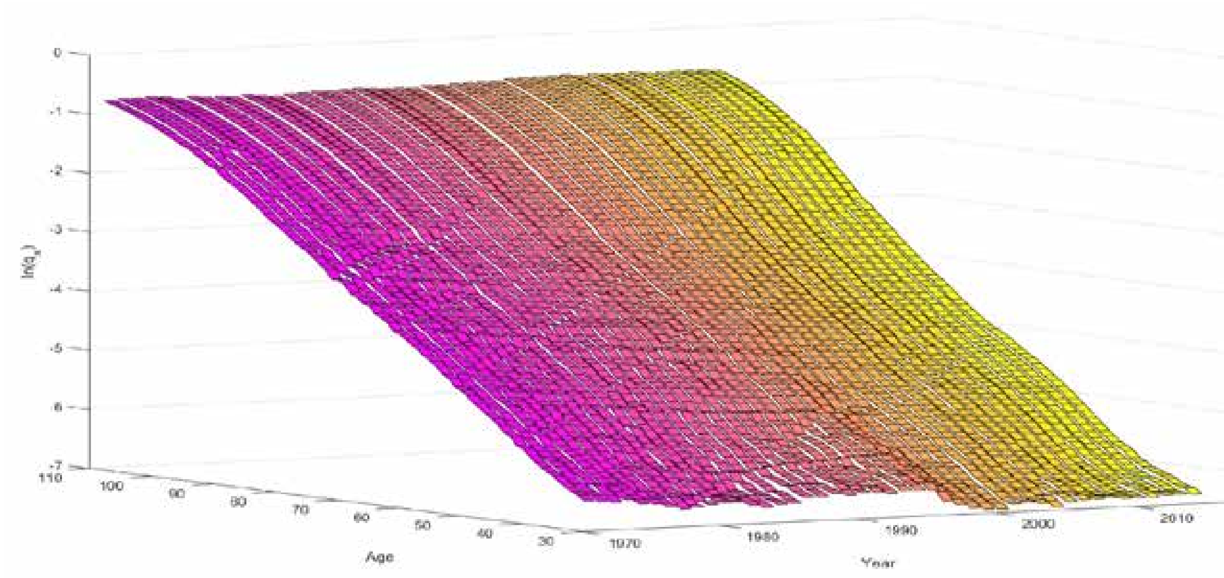
$$T_t = \begin{bmatrix} -(q_{1,t}+\lambda_{1,t}) & \lambda_{1,t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -(q_{2,t}+\lambda_{2,t}) & \lambda_{2,t} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -q_{n,t} \end{bmatrix}$$

که در اینجا $\lambda_{i,t}$ میزان شدت پیری فیزیولوژیکی در وضعیت i و سال t است.

فرض می‌کنیم برای تمامی سنین و سال‌ها $\lambda_{i,t} = \lambda$ است. البته این فرض هیچ ایرادی به مدل وارد نمی‌کند، چراکه احتمال انتقال در سال t برابر است با $\frac{\lambda}{(q_{i,t}+\lambda)}$ و در هر وضعیت این احتمال تغییر می‌کند. پارامتر $q_{i,t}$ نرخ حرکت به سمت حالت جاذب (مرگ) است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$q_{i,t} = \left(a + F\left(\left(\frac{i}{n}\right), \beta, \gamma\right)\right) * k(t) \qquad (۶)$$

که در اینجا a نرخ پایه شرایط محیطی است و $h(i) = F\left(\left(\frac{i}{n}\right), \beta, \gamma\right)$ فرایند پیری در رابطه به سن فیزیولوژیکی را نشان می‌دهد.



شکل ۲: لگاریتم احتمال مرگ‌ومیر سن ۰۳ تا ۸۰۱ و سال۰۷۹۱ تا ۴۱۰۲ آمریکا
Fig. 2: log of the probability of death between the ages of 30 and 108 and from 1970 to 2014 in the USA

نتایج عددی

در این بخش، مدل پیشنهادی بخش سوم را با مجموعه‌داده‌های ایالات متحده آمریکا برازش می‌دهیم. با توجه به ساختار مدل و در دسترس بودن داده‌ها ما از داده‌های دوره‌ای (Period) استفاده کرده‌ایم. داده‌های موردنظر از سایت $www \cdot mortality \cdot org$ برای سال‌های ۱۹۷۰ تا ۲۰۱۹ و سنین ۳۰ تا ۱۰۸ دانلود شده است که از سال‌های ۱۹۷۰ تا ۲۰۱۴ که در شکل ۲ لگاریتم داده‌ها (احتمال مرگ‌ومیر) برای سال‌ها و سنین متفاوت نمایش داده شده است برای برازش استفاده کرده و داده‌های ۲۰۱۵ تا ۲۰۱۹ برای بررسی مناسب‌بودن مدل در پیش‌بینی استفاده شده است. برای محاسبات از نرم افزار MATLAB و برای بهینه‌سازی از الگوریتم SQP تابع $Fmincan$ استفاده شده است.

برازش مدل

ازآنجایی‌که در توزیع فاز نوع محاسبات ماکسیمم درستنمایی از الگوریتم EM استفاده می‌شود و به‌شدت زمانبر است (Asmussen *et al.*, 1996)، ما در اینجا جهت برآورد پارامترها از روش کمترین توان‌های دوم خطا وزنی که به‌صورت زیر معرفی می‌شود استفاده می‌کنیم.

$$\sum_{t=t_1}^{t_m} \sum_{y=1}^{\omega} (S_x(y,t) - \hat{S}_x(y,t))^2 w_x(y,t) \qquad (۷)$$

که در اینجا:

- $S_x(y,t)$ احتمال بقای یک فرد x ساله تا y سال بعد در دوره t است.
- $\hat{S}_x(y,t)$ برآورد مدل متناظر با $S_x(y,t)$ است، به‌عبارت دیگر:

$$\hat{S}_x(y,t) = \alpha_t \exp(T_{(x)t} y)\mathbf{1}$$

- $w_x(y,t)$ وزن‌های مورداستفاده است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$w_x(y,t) = |S_x(y,t) - \bar{S}_x(\cdot,t)|$$
$$\bar{S}_x(\cdot,t) = \frac{1}{\omega}\sum_{y=1}^{\omega} S_x(y,t)$$

- x سن موردمطالعه که در اینجا ۳۰ در نظر گرفته شده است.
- ω ماکسیمم سن موردمطالعه است.
- t_1 و t_m اولین و آخرین سال (دوره) موردمطالعه است که در این پژوهش ۱۹۷۰ و ۲۰۱۴ در نظر گرفته شده است.

بدیهی است که انتخاب $w_x(y,t)$ به‌صورت تجربی و در بهبود عملکرد برآوردیابی انتخاب می‌شود.

بنابراین درنهایت برای به دست آوردن احتمال مرگ‌ومیر داریم:

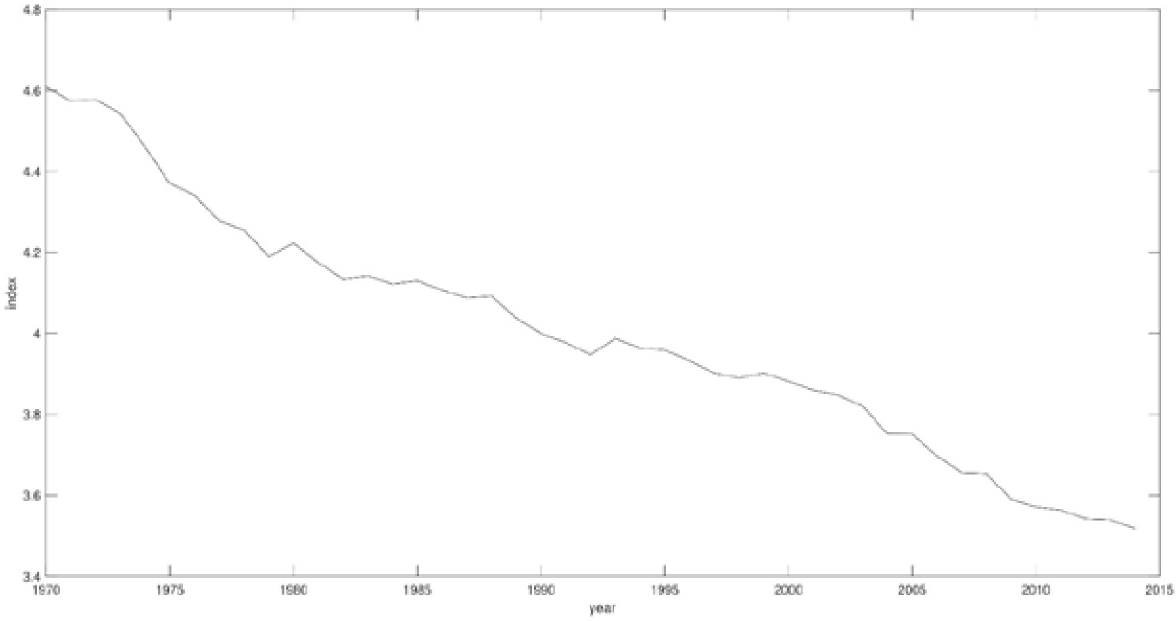
$$\hat{q}_{(x+y),t} = \frac{(\hat{S}_x(y,t) - \hat{S}_x((y+1),t))}{\hat{S}_x(y,t)} \qquad (۸)$$

که در اینجا $\hat{q}_{(x+y),t}$، برآورد احتمال فوت یک فرد $(x+y)$ساله در سال tام است.

در این محاسبات $n = 250$ در نظر گرفته شده است، به‌عبارت دیگر بیشترین سن فیزیولوژیکی ۲۵۰ سال بوده و علت این انتخاب بهترین عملکرد ممکن در بین nهای متفاوت است. منظور از بهترین عملکرد این است که در حالت‌های متفاوت n، مدل برازش شده است

جدول ۱: برآورد پارامترها
Table 1: Estimation of parameters

پارامتر Parameter	$\hat{p}$	$\hat{a}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\lambda}$
برآورد Estimation	0.0463	$2.727*10^{-4}$	3.3811	0.0287	3.2001



شکل ۳: شاخص مرگ‌ومیر متغیر با زمان $\widehat{k(t)}$
Fig. 3: Mortality index varying with time $\widehat{k(t)}$

و براساس رابطه (۷) کمترین توان‌های دوم خطا وزنی در $n = 250$ به دست آمده است.

براساس مطالب فوق و اجرای برنامه‌نویسی، نتایج پارامترهای برآوردشده در جدول ۱ نمایش داده شده است. در شکل ۳، روند $\widehat{k(t)}$ نیز نمایش داده شده است که روند نزولی دارد. به‌عبارت دیگر روند $\widehat{k(t)}$، بیان از کم‌شدن نرخ مرگ‌ومیر و همچنین بهبود سن فیزیولوژیکی (که یکی از فاکتورهای سلامت است) در طول زمان را دارد.

نتایج برازش برخی سال‌ها برای نرخ‌های بقا و مرگ‌ومیر در شکل‌های ۴ و ۵ نمایش داده شده است و همان‌طور که دیده می‌شود نتایج قابل‌قبول و با مطلوبیت بالا است.

پیش‌بینی براساس مدل

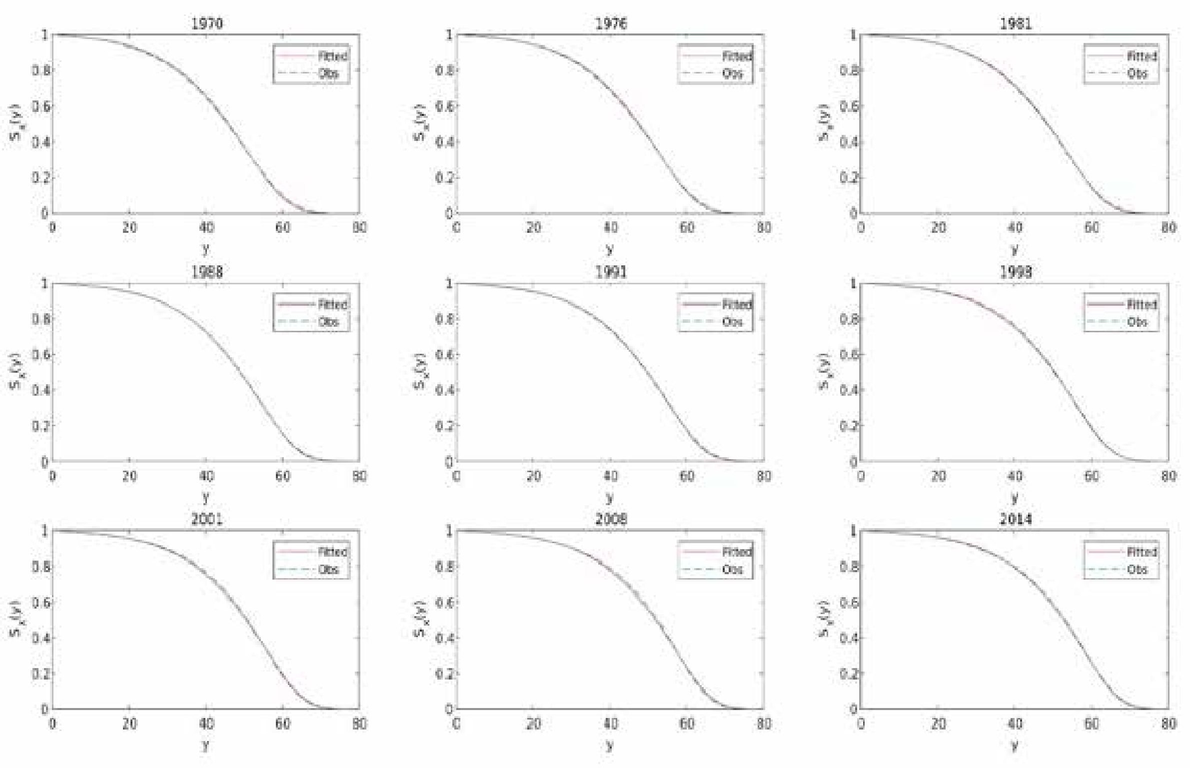
برای پیش‌بینی احتمال مرگ‌ومیر (بقا) کافی است براساس الگوی به‌دست‌آمده از شاخص زمانی $\widehat{k(t)}$ استفاده کرد. همان‌گونه که قبلاً اشاره شد، برای برازش از داده‌های ۱۹۷۰ تا ۲۰۱۴ استفاده کردیم و ۱۰ درصد از داده‌ها (۲۰۱۵ تا ۲۰۱۹) را برای بررسی پیش‌بینی استفاده می‌کنیم.

یک مدل سری زمانی براساس $\widehat{k(t)}$، مطابق روشی که لی و کارتر ارائه کرده‌اند را استفاده می‌کنیم. عوامل دیگر در مدل ما، مانند نرخ پیری فیزیولوژیکی، بردار احتمال اولیه و ... تأثیر زمان را از طریق $\widehat{k(t)}$ نشان می‌دهند.

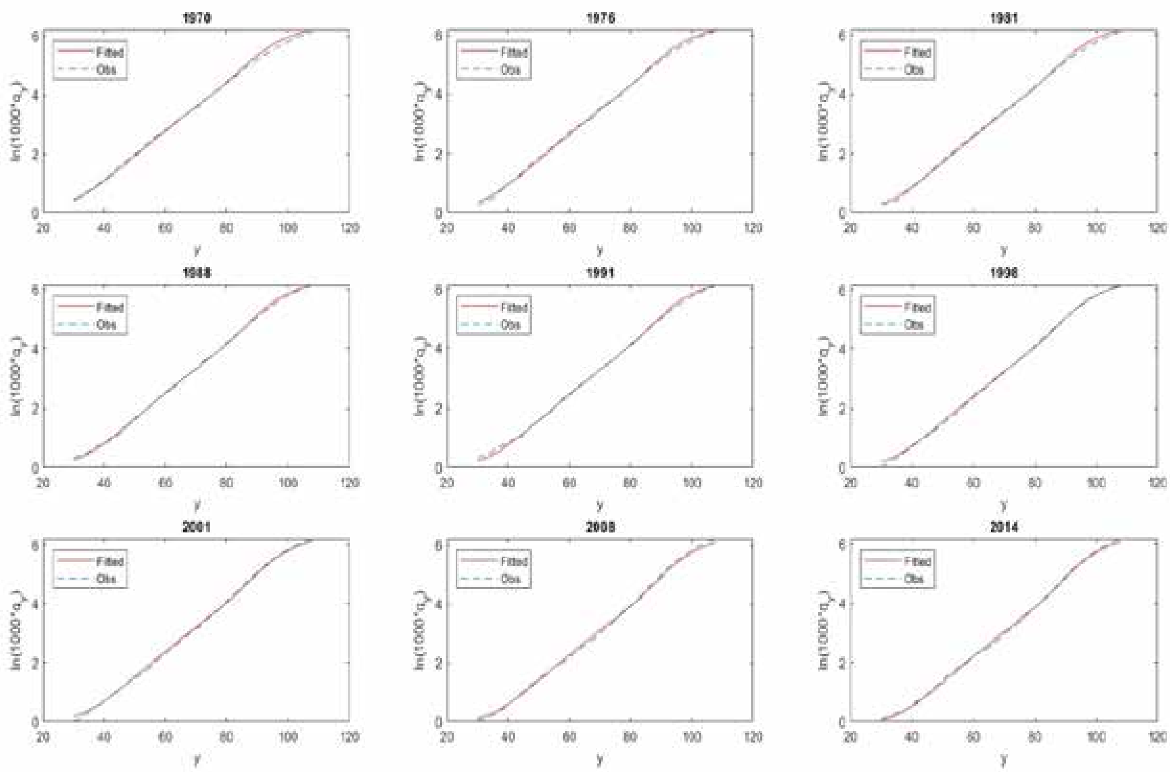
به‌منظور یافتن مدل سری زمانی برای $\widehat{k(t)}$، برخی از آزمون‌های پایه‌ای در سری زمانی مانند قدم‌زدن تصادفی، آزمون ایستایی و ... براساس Chatfield, (2003) مورد بررسی قرار گرفته و سپس در بین کل $ARIMA(p,d,q)$ های ممکن بهترین مدل براساس BIC انتخاب شده است که نتایج در جدول ۲ و شکل ۶ ارائه شده است.

پس از انتخاب مدل سری زمانی $\widehat{k(t)}$ می‌توان از آن برای پیش‌بینی مرگ‌ومیر و یا بقا توسط مدل استفاده کرد. نتایج پیش‌بینی برای مجموعه‌داده‌های موردبحث در شکل ۷ و ۸ نشان داده شده است. علاوه بر این در جدول ۳ مقادیر پیش‌بینی امید به زندگی ارائه شده است. با توجه به نتایج، پیش‌بینی مدل مطلوب بوده و نتایج به داده‌های واقعی نزدیک است.

برای مقایسه مدل ما و مدل لی کارتر همان‌گونه که در جدول ۴ مشاهده می‌شود ـ فارغ از اینکه تعداد پارامترهای مدل ما برای این مجموعه داده حدود یک چهارم پارامترهای مدل لی



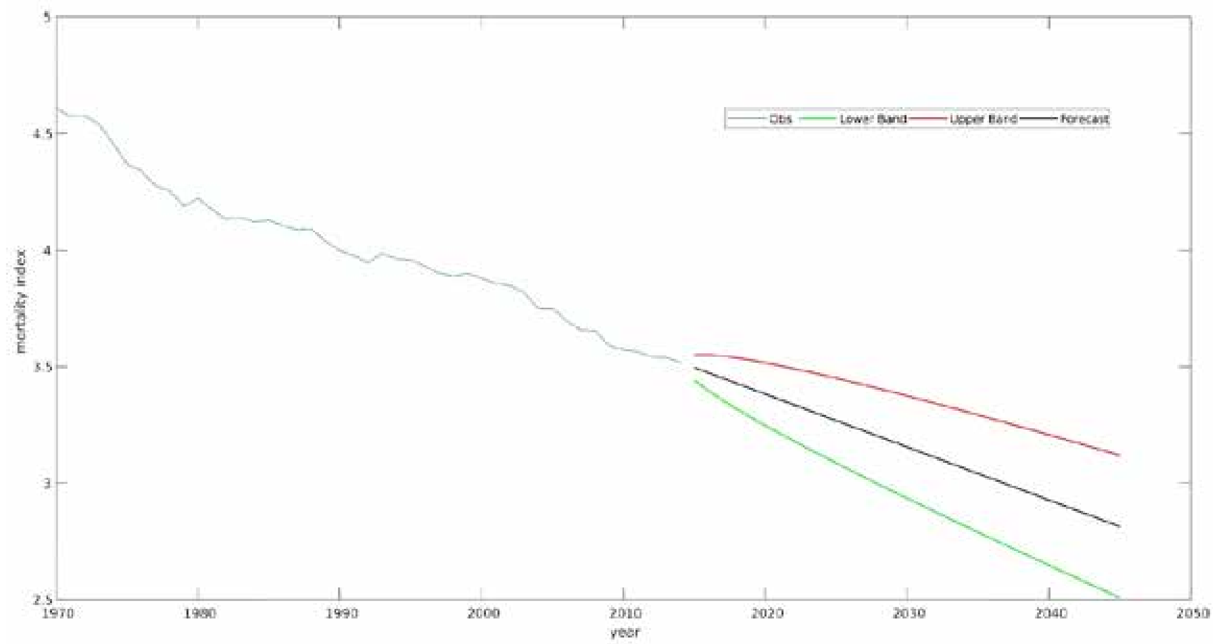
شکل ۴: برازش $S_{30}(y,t)$ برای برخی از t ها
Fig. 4: Fit $S_{30}(y,t)$ for some t's



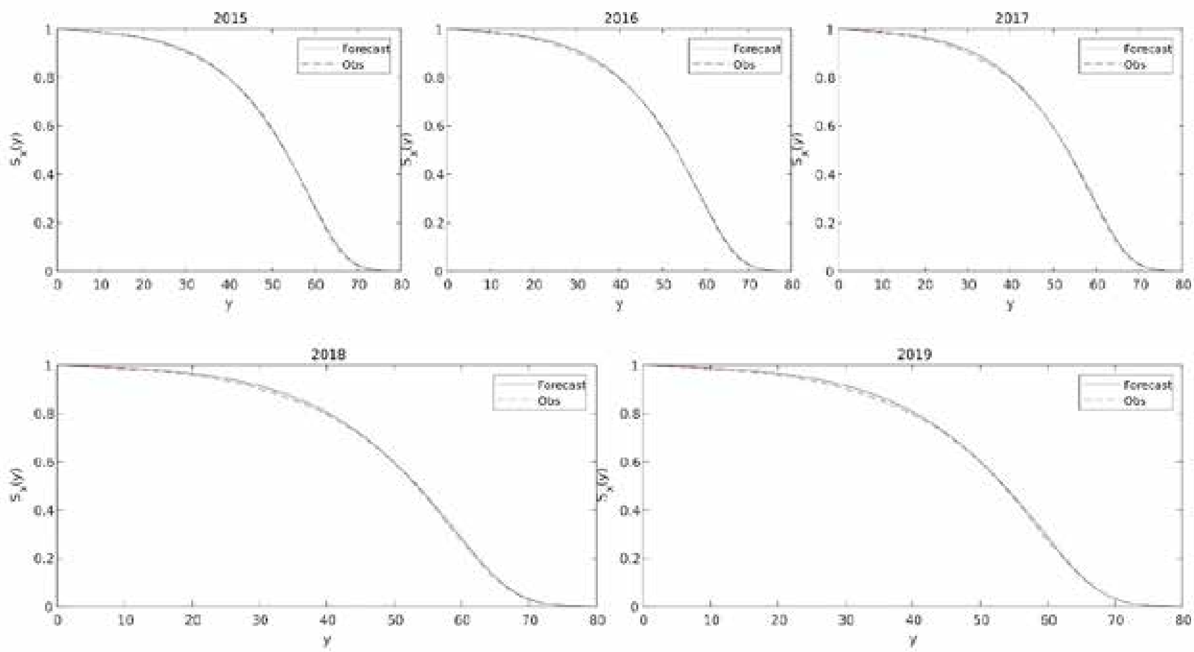
شکل ۵: برازش $Ln(1000 * q_y)$ برای برخی از t ها
Fig. 5: Fitting $Ln(1000 * q_y)$ for some t's

جدول ۲: مدل سری زمانی برای پیش‌بینی
Table 2: Time series model for forecasting

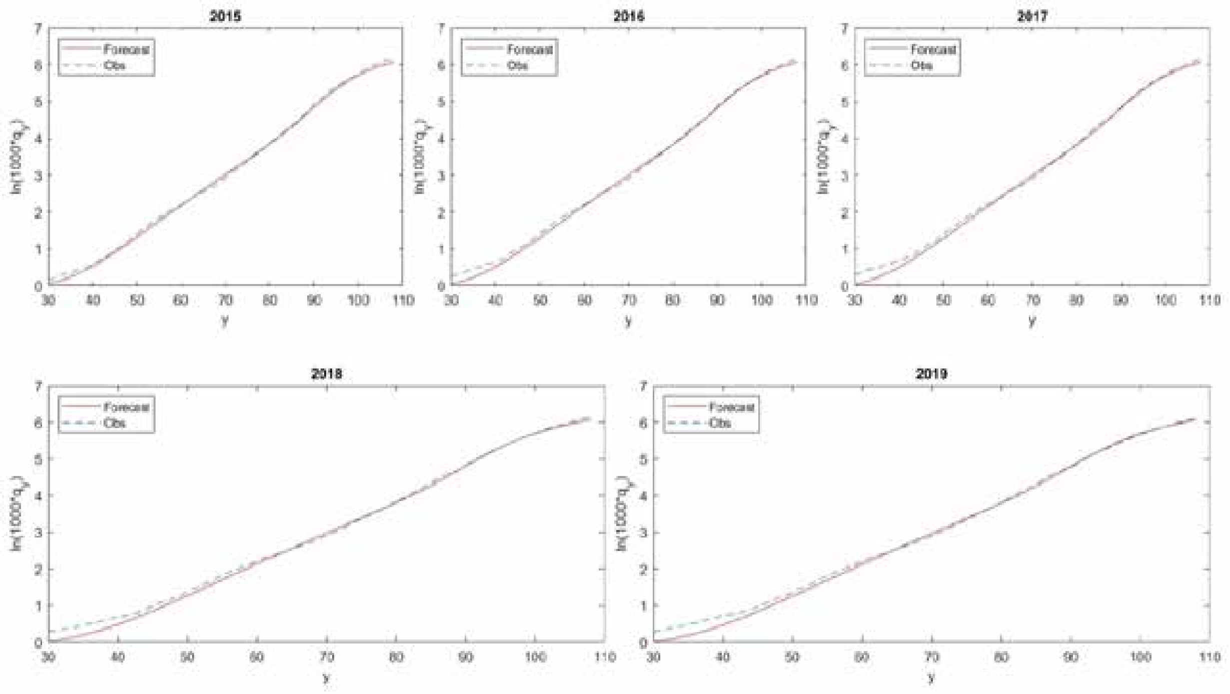
مجموعه‌داده Data base	مدل Model	ثابت Constant	BIC	AIC	واریانس Variance
آمریکا (1970: 2014) USA (1970-2014)	$ARIMA(0,1,0)$	-0.022735	-186.5327	-190.1010	$7.8389*10^{-4}$



شکل ۶: پیش‌بینی شاخص زمانی مرگ‌ومیر ($\widehat{k(t)}$) برای سال‌های ۲۰۱۵ تا ۲۰۴۵
Fig. 6: Forecast of the index of mortality ($\widehat{k(t)}$) for the years 2015 to 2045



شکل ۷: پیش‌بینی $S_{30}(y)$ سال‌های ۲۰۱۵ تا ۲۰۱۹
Fig. 7: Forecast of $S_{30}(y)$ from 2015 to 2019



شکل ۸: پیش‌بینی نرخ مرگ‌ومیر برای سنین متفاوت از سال‌های ۲۰۱۵ تا ۲۰۱۹
Fig. 8: Forecast of death rate for different ages from 2015 to 2019

جدول ۳: مقایسه مقدار واقعی و پیش‌بینی امید به زندگی برای سال‌های ۲۰۱۵ تا ۲۰۱۹
Table 3: Comparison of the actual value and the forecast of life expectancy for the years 2015 to 2019

2019	2018	2017	2016	2015		سال Year
50.0	49.8	49.8	49.8	49.7	واقعی Actual	امید به زندگی یک فرد ۳۰ ساله Life expectancy of a 30-year-old person
50.4	50.3	50.1	50.0	49.9	پیش‌بینی Forecast	
31.7	31.5	31.4	31.4	31.2	واقعی Actual	امید به زندگی یک فرد ۵۰ ساله Life expectancy of a 50-year-old person
31.8	31.7	31.6	31.7	31.3	پیش‌بینی Forecast	
15.8	15.6	15.5	15.5	15.4	واقعی Actual	امید به زندگی یک فرد ۷۰ ساله Life expectancy of a 70-year-old person
15.8	15.7	15.6	15.5	15.4	پیش‌بینی Forecast	

جدول ۴: مقایسه مناسب‌بودن برازش و پیش‌بینی
Table 4: Comparison of goodness of fit and prediction

خطای پیش‌بینی مرگ‌ومیر Mortality forecast error	خطای پیش‌بینی بقا Survival forecast error	BIC	AIC	تعدادپارامترها Number of parameters	لگاریتم درستنمایی Log- likelihood	MSE	R^2	مدل Model
0.0277	0.0161	36080.2	35771.4	50	-17835.7	0.0209	0.99991	مدل این پژوهش Our Model
0.0632	0.0292	37125.7	35884.3	201	-17741.2	0.0139	0.99994	مدل لی کارتر Lee-carter Model

کارتر است ـ سنجه BIC و AIC، در مدل ما بهتر از مدل لی کارتر است. البته در سنجه MSE و لگاریتم درست‌نمایی مدل لی کارتر بهتر از مدل ما می باشد که علت این موضوع تعداد زیاد پارامتر در مدل لی کارتر نسبت به مدل ما است. این در حالی است که خطای پیش‌بینی مدل لی کارتر حدود دو برابر مدل ما می‌باشد. بنابراین در پیش‌بینی نیز مدل ما بهتر از مدل لی کارتر عمل می‌کند.

کاربرد در بیم سنجی

یکی از ویژگی‌های توزیع فاز نوع داشتن فرم بسته گشتاورها و همچنین محاسبات مستقیم است. در این بخش ابتدا اطلاعاتی در مورد محاسبه ارزش فعلی آکچوئری و .... ارائه می‌شود و سپس نتایج محاسبات ارائه می‌گردد.

پرداخت‌های صورت‌گرفته در بیمه‌های عمر مستمری معمولاً در بازه‌های زمانی منظم انجام می‌شود و در حالت بسیار متداول این مبالغ به‌صورت یکسان می‌باشد. ارزش‌گذاری محصولات عمر و مستمری بسیار حائز اهمیت است چراکه در محاسبات حق بیمه‌ها ارزش بیمه‌نامه‌ها و حتی مزایای بازنشستگی مهم‌ترین نقش را ایفا می‌کند. ارزش فعلی یک مستمری عمر یک متغیر تصادفی است چراکه به طول عمر فرد بستگی دارد. قراردادهای بیمه عمر مستمری که موضوع موردمطالعه بوده در تمامی بازارهای توسعه‌یافته بیمه وجود دارد. به‌تازگی طراحی محصولات بیمه عمر تغییرات بنیادینی کرده است و تکنیک‌های موردنیاز مدیریت چنین قراردادهای بالا و مدرنی از هر زمان دیگری پیچیده‌تر شده است.(Mitchell, 2002) بیمه عمر زمانی، بیمه تمام‌عمر و بیمه عمر مختلط محصولات سنتی‌اند که شامل منفعت نقدی در زمان فوت و یا در سررسید یا مقادیر ازپیش‌تعیین‌شده حق بیمه و مزیت می‌باشند. بیمه عمر زمانی یک سود تضمین شده و اگر در زمان فوت بیمه‌شده پیش از پایان یک مهلت مشخص اتفاق بیفتد، پرداخت می‌کند. بیمه عمر زمانی به بیمه‌گذار اجازه می‌دهد تا یک مقدار ثابت در صورت فوت برای خانواده‌اش فراهم نماید. بیمه تمام‌عمر مبلغ تجمیعی را در زمان فوت بیمه‌گذار، هرموقع اتفاق بیفتد، پرداخت می‌کند. لازم به ذکر است برای قراردادهای با حق بیمه‌های منظم تنها در یک حداکثر سن مثلاً ۸۰ ساله قابل‌پرداخت است. بیمه عمر مختلط شامل یک سود تجمعی در زمان فوت بیمه‌گذار و یا در پایان زمان مشخص‌شده ـ هرکدام که زودتر اتفاق بیفتد ـ و ترکیبی از یک بیمه عمر زمانی و یک ابزار پس‌انداز است. اگر بیمه‌گذار فوت شود آن‌گاه سرمایه طبق بیمه عمر زمانی پرداخت می‌گردد و اگر بیمه‌گذار زنده بماند سرمایه مطابق قرارداد در زمان سررسید عمل می‌کند. قراردادهای مستمری برخی پرداخت منظم را ارائه می‌کند. زمانی که پرداخت مستمری به زنده‌بودن فرد گیرنده بستگی داشته باشد مستمری، مستمری عمر نامیده می‌شود و همچنین به دریافت‌کننده، مستمری‌بگیر گفته می‌شود (Poterba, 2001). بنابراین در ادامه چند حالت از محاسبه ارزش فعلی پرداخت یکجا و همچنین مستمری را براساس مدل معرفی‌شده این پژوهش بیان می‌کنیم.

مدل معرفی‌شده در بخش سوم دارای کمیت تصادفی t است. این پارامتر نه تنها محاسبات را ساده می‌کند، بلکه محدوده سن فیزیولوژیکی هر فرد در مدل را نیز تشخیص می‌دهد. بنابراین روابط آکچوئری براساس مدل ما به‌صورت زیر خواهد بود:

- ارزش فعلی پرداخت یکجا در زمان فوت؛

$$\bar{A}_{x:\overline{m}|} = \sum_{i=1}^{m} \int_{i-1}^{i} e^{-\delta s} \alpha_i e^{T_i s} (-T_i) \mathbf{1} ds \tag{۹}$$
$$\Rightarrow \bar{A}_{x:\overline{m}|} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (\delta I - T_i)^{-1} \{e^{-(i-1)(\delta I - T_i)} - e^{-i(\delta I - T_i)}\} (-T_i) \mathbf{1}$$

- ارزش فعلی سالیانه پیوسته؛

$$\bar{a}_{x:\overline{m}|} = \sum_{i=1}^{m} \int_{i-1}^{i} e^{-\delta s} \alpha_i e^{T_i s} \mathbf{1} ds \tag{۱۰}$$
$$\Rightarrow \bar{a}_{x:\overline{m}|} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (\delta I - T_i)^{-1} \{e^{-(i-1)(\delta I - T_i)} - e^{-i(\delta I - T_i)}\} \mathbf{1}$$

جدول ۵: ارزش فعلی آکچوئریای $A_{x:\overline{5|}}$ برای سنین و نرخ بهره‌های متفاوت

Table 5: Present actuarial value of $A_{x:\overline{5|}}$ for different ages and interest rates

سن Age	نرخ بهره Interest rates	$A_{x:\overline{5|}}$ براساس داده واقعی ۵ ساله $A_{x:\overline{5|}}$ Based on 5 years of actual data	$A_{x:\overline{5|}}$ براساس پیش‌بینی مدل این پژوهش $A_{x:\overline{5|}}$ Based on the forecast of the our model	$A_{x:\overline{5|}}$ براساس پیش‌بینی مدل لی-کارتر $A_{x:\overline{5|}}$ Based on the Forecast of the Lee-Carter model	خطای مدل لی-کارتر Lee-Carter model error	خطای مدل این پژوهش Our model error
	%1	0.94249	0.94239	0.94238	0.00010	0.00009
30	%4	0.79185	0.79153	0.79149	0.00036	0.00032
	%7	0.66868	0.66820	0.66813	0.00055	0.00048
	%1	0.94345	0.94342	0.94335	0.00009	0.00003
60	%4	0.79522	0.79511	0.79488	0.00033	0.00011
	%7	0.67387	0.67370	0.67336	0.00051	0.00016
	%1	0.95962	0.95901	0.96067	(0.00105)	0.00060
90	%4	0.85182	0.84966	0.85550	(0.00368)	0.00215
	%7	0.76101	0.75764	0.76666	(0.00565)	0.00336

جدول ۶: ارزش فعلی آکچوئریای $\ddot{a}_{x:\overline{5|}}$ برای سنین و نرخ بهره‌های متفاوت

Table 6: Present actuarial value of $\ddot{a}_{x:\overline{5|}}$ for different ages and interest rates

سن Age	نرخ بهره Interest rates	$\ddot{a}_{x:\overline{5|}}$ براساس داده واقعی ۵ ساله $\ddot{a}_{x:\overline{5|}}$ Based on 5 years of actual data	$\ddot{a}_{x:\overline{5|}}$ براساس پیش‌بینی مدل این پژوهش $\ddot{a}_{x:\overline{5|}}$ Based on the forecast of the our model	$\ddot{a}_{x:\overline{5|}}$ براساس پیش‌بینی مدل لی-کارتر $\ddot{a}_{x:\overline{5|}}$ Based on the Forecast of the Lee-Carter model	خطای مدل لی-کارتر Lee-Carter model error	خطای مدل این پژوهش Our model error
	%1	5.80831	5.81773	5.81902	(0.01071)	(0.00942)
30	%4	5.41169	5.42004	5.42119	(0.00950)	(0.00835)
	%7	5.06435	5.07178	5.07281	(0.00846)	(0.00743)
	%1	5.71124	5.71441	5.72098	(0.00973)	(0.00317)
60	%4	5.32415	5.32699	5.33288	(0.00873)	(0.00284)
	%7	4.98506	4.98762	4.99292	(0.00786)	(0.00255)
	%1	4.07812	4.13965	3.97166	0.10646	(0.06152)
90	%4	3.85245	3.90860	3.75674	0.09571	(0.05614)
	%7	3.65312	3.70456	3.56669	0.08642	(0.05144)

- ارزش فعلی پرداخت یکجا در انتهای سال فوت و یا زنده‌ماندن بعد از سررسید قرارداد؛

$$A_{x:\overline{m|}} = \vartheta q_x^{(t_1)} + \sum_{k=1}^{m-1} \vartheta^{k+1} q_x^{(t_{k+1})} \prod_{i=0}^{k-1} p_{x+i}^{(t_{i+1})} + \vartheta^m \prod_{i=0}^{m-1} p_{x+i}^{(t_{i+1})} \qquad (۱۱)$$

- ارزش فعلی سالیانه گسسته؛

$$\ddot{a}_{x:\overline{m|}} = 1 + \sum_{k=1}^{m-1} \vartheta^k \prod_{i=0}^{k-1} p_{x+i}^{(t_{i+1})} \qquad (۱۲)$$

که در اینجا x سن فرد بیمه‌شده است؛ i سال‌های تقویمی را می‌شمارد؛ δ نرخ بهره پیوسته؛ ϑ نرخ تنزیل، $q_x^{t_i}$ احتمال مرگ‌ومیر یک فرد x ساله در سال t_i و $p_x^{t_i}$ احتمال زنده‌ماندن یک فرد x ساله در سال t_i است. سایر روابط را می‌توان با توجه به رویکردهای Gerber (1990) به‌صورت فوق به دست آورد. بدیهی است که مدل‌هایی همچون لی کارتر برای به‌دست‌آوردن این روابط دارای فرم بسته نیستند و این یک مزیت برای مدل ما است. بنابراین با توجه به اطلاعات بخش‌های قبلی می‌توان روابط فوق را محاسبه کرد، این روش چون‌که از پیش‌بینی استفاده می‌کند بنابراین از روش‌های سنتی دقیق‌تر خواهد بود. برای بررسی این ادعا، قیمت‌گذاری یک محصول به‌شرط فوت و یک مستمری ۵ ساله (چون اطلاعات ۵ سال موجود است) براساس روابط فوق و پیش‌بینی‌های بخش‌های قبلی را به دست آورده و با داده‌های واقعی مقایسه می‌کنیم که نتایج در جدول ۵ و ۶ ارائه گردیده است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود خطای پیش‌بینی به‌شدت کم و حتی در اکثر حالات کمتر از یک درصد است. البته این درحالی است که در حالتی که از آخرین جدول عمر استفاده می‌کردیم نتایج با مقدار واقعی اختلافی در حدود ۱۰ درصد را ایجاد می‌کند که در مقدار سودوزیان احتمالی یک نهاد بیمه‌ای به‌شدت اثرگذار است.

جمع‌بندی و پیشنهادها

در این پژوهش با توجه به ارائه یک مدل پیش‌بینی مرگ‌ومیر که با تعداد کمتری پارامتر نسبت به مدل‌های قبلی برازش می‌شود، نتایج بسیار مطلوب‌تری در برازش و به‌ویژه پیش‌بینی نسبت به مدل لی کارتر به دست می‌آوریم.

با توجه به اینکه در این مدل از توزیع فاز نوع استفاده کرده‌ایم، بنابراین برای روابط آکچوئری می‌توان فرم بسته به دست آورد که در بخش پنجم ارائه گردیده است.

همان‌گونه که بیان شد در این پژوهش به‌نحوی به‌جای نرخ‌گذاری ایستا (صرفاً استفاده از آخرین جدول عمر) از پیش‌بینی جدول عمر استفاده شده و به‌نحوی نرخ‌گذاری به‌صورت پویا انجام شده است. نتایج بخش پنجم بسیار رضایت‌بخش است و می‌توان به آکچوئران پیشنهاد استفاده از این مدل در نرخ گذاری محصولات بیمه زندگی را داد.

در جهت پژوهش‌های آینده:

- می‌توان با اضافه‌کردن اثر کوهورت (نسل)، پیش‌بینی مرگ‌ومیر و درنتیجه نرخ‌گذاری محصولات بیمه‌ای را بهبود بخشید و اثر آن را با حالت فعلی مقایسه کرد.
- یکی از دستاوردهای این مقاله برآورد احتمالی محدوده ورود سن فیزیولوژیکی به شرط سن تقویمی است که با قراردادن توزیع دوجمله‌ای در درایه‌های بردار احتمال اولیه قرار به دست می‌آید. در این راستا می‌تواند با روش‌های دیگری که در بخش سوم به آن‌ها عطف کرده‌ایم، مقایسه شود.
- با اضافه‌کردن پارمترهای توسعه (برای سنین اولیه) در مدل می‌توان از سن صفر سالگی احتمال مرگ‌ومیر را برازش داد. البته در این حالت زمان اجرای برنامه‌ها زمانبرتر خواهد بود.
- می‌توان از این روش برای نرخ‌گذاری محصولات نوین بیمه زندگی همچون "تضمین حداقل به مزایای فوت" ، "تضمین حداقل به مزایای سررسید" و ... استفاده کرد.
- با بررسی مدل‌های تصادفی نرخ بهره، می‌توان از نرخ بهره تصادفی (حتی اضافه‌کردن اثرات تورم، نقدینگی و ...) در محاسبات بخش پنجم استفاده کرد.

مشارکت نویسندگان

آرمان رستمی: نگارش اولیه، جمع‌آوری مطالب و پیاده‌سازی، امین حسن‌زاده: نظارت بر اجرا، اصلاح و جمع‌بندی.

تشکر و قدردانی

این مقاله مستخرج از رساله دکتری آرمان رستمی با عنوان "پیش‌بینی مرگ‌ومیر با استفاده از توزیع‌های فاز نوع و کاربرد آن در علوم بیم‌سنجی" دانشگاه شهید بهشتی و با راهنمایی دکتر امین حسن‌زاده می‌باشد؛ بدینوسیله از راهنمایی‌ها و مشاوره‌های ایشان تشکر می‌نمایم.

تعارض منافع

نویسنده (گان) اعلام می‌دارند که در مورد انتشار این مقاله تضاد منافع وجود ندارد. علاوه بر این، موضوعات اخلاقی شامل سرقت ادبی، رضایت آگاهانه، سوءرفتار، جعل داده‌ها، انتشار و ارسال مجدد و مکرر توسط نویسندگان رعایت شده است.

منابع

Aalaei, M., (2023). Introducing enhanced annuity product and calculating its payouts for the insureds with different cancers using adjustment approaches of possible mortality. Iran. J. Insur. Res., 12(2): 143-154 **(12 Pages)**. [In Persian]

Anderson, A.W., (2006). Pension mathematics for actuaries. ACTEX Publication.

Asghari, R.; Hassan Zadeh, A., (2019). Mortality modeling of skin cancer patients with actuarial applications. N. Am. Actuarial. J., 24(4): 495-511 **(17 Pages)**.

Asmussen, S.; Laub, P.J.; Yang, H., (2019). Phase-type models in life insurance: Fitting and valuation of equity-linked benefits. Risks., 7(1): 1-17 **(17 Pages)**.

Asmussen, S.; Nerman, O.; Olsson, M., (1996). Fitting phase-type distributions via the EM algorithm. Scand. J. Stat., 23(4): 419-441 **(23 Pages)**.

Asmussen, S.; Steffensen, M., (2020). Risk and insurance. Springer.

Cairns, A.J.G.; Blake, D.; Dowd, K.; Coughlan, G.D.; Epstein, D.; Khalaf-Allah, M., (2011). Mortality density forecasts: An analysis of six stochastic mortality models. Insur. Math. Econ., 48(3): 355-367 **(13 Pages)**.

Chatfield, C., (2003). The analysis of time series: An Introduction. Chapman and Hall/CRC Press.

Dickson, D.C.; Hardy, M.R.; Waters, H.R., (2019). Actuarial mathematics for life contingent risks. Cambridge University Press.

Embrechts, P.; Kluppelberg, C., (1994). Some aspects of insurance mathematics. Theory. Probab. Appl., 38(2): 262-296 **(35 Pages)**.

Fischer, T., (2007). A law of large numbers approach to valuation in life insurance. Insur. Math. Econ., 40(1): 35-57 **(23 Pages)**.

Gavrilov, L.A.; Gavrilova, N.S., (1992). The Biology of Life Span: A quantitative approach. Ecology, 73(1): 379-381 **(3 Pages)**.

Gerber, H.U., (1990). Life insurance mathematics. Springer.

Hald, A., (1987). On the early history of life insurance mathematics. Scand. Actuarial. J., 1987(1/2): 4-18 **(15 Pages)**.

Hardy, M., (2003). Investment guarantees: Modeling and risk management for equity-linked life insurance. John Wiley and Sons.

Komijani, A., Mohammadi, S., Kousheshi, M.; Niakan, L., (2014). Life annuity pricing based on fuzzy technical interest rate. Iran. J. Insur. Res., 3(4): 33-60 **(12 Pages)**. [In Persian]

Latouche, G.; Ramaswami, V., (1999). Introduction to matrix analytic methods in stochastic modeling. SIAM.

Laurent, J.P.; Norberg, R.; Planchet, F., (2016). Modelling in life insurance: A management perspective. Springer.

Lee, R.D.; Carter, L.R., (1992). Modeling and forecasting US mortality. J. Am. Stat. Assoc., 87(419): 659-671 **(13 Pages)**.

Lehtomaa, J., (2021). Life insurance mathematics. Luentomateriaali. Helsinginyliopisto.

Lin, X.S.; Liu, X., (2007). Markov aging process and phase-type law of mortality. N. Am. Actuarial. J., 11(4): 92-109 **(18 Pages)**.

Liu, X., (2013). Annuity uncertainty with stochastic mortality and interest rates. N. Am. Actuarial. J., 17(2): 136-152 **(17 Pages)**.

Mitchell, O.S., (2002). Developments in decumulation: The role of annuity products in financing retirement. In Ageing, Financial Markets and Monetary Policy. Springer., 97-125 **(29 Pages)**.

Moller, T.; Steffensen, M., (2007). Market-valuation methods in life and pension insurance. Cambridge University Press.

Neuts, M.F., (1994). Matrix-geometric solutions in stochastic models: An algorithmic approach. Courier. Corporation.

Norberg, R., (2002). Basic life insurance mathematics. Lecture notes, Laboratory of Actuarial Mathematics, University of Copenhagen.

Norberg, R., (2014). Multistate models for life insurance mathematics. Wiley.

Olivieri, A.; Pitacco, E., (2015). Introduction to insurance mathematics: Technical and financial features of risk transfers. Springer.

Poterba, J.M., (2001). Annuity markets and retirement security. Fiscal. Stud., 22(3): 249-270 **(22 Pages)**.

Renshaw, A.E.; Haberman, S., (2006). A cohort-based extension to the Lee-Carter model for mortality reduction factors. Insur. Math. Econ., 38(3): 556-570 **(15 Pages)**.

Sharma, N.; Selvamuthu, D.; Natarajan, S., (2022). Variable annuities valuation under a mixed fractional Brownian motion environment with jumps considering mortality risk. Appl. Stochastics. Model. Bus. Ind., 38(6): 1019-1038 **(20 Pages)**.

Shojaee Azar, Z.; Hassan Zadeh, A., (2014). The use of phase-type distributions in mortality modeling. Iran. J. Insur. Res., 3(1): 105-126 **(22 Pages)**. [In Persian]

Tabeau, E.; Van Den Berg Jeths, A.; Heathcote, C., (2001). Forecasting mortality in developed countries: Insights from a statistical, demographic and epidemiological perspective. springer.

AUTHOR(S) BIOSKETCHES	معرفی نویسندگان

آرمان رستمی، دانشجوی دکتری بیم‌سنجی، گروه بیم‌سنجی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران

- Email: *ar_rostami@sbu.ac.ir*
- ORCID: 0000-0002-3754-420X
- Homepage: https://mathsci.sbu.ac.ir/biomedicalsciences

امین حسن‌زاده، عضو هیئت علمی گروه بیم‌سنجی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران

- Email: *am_hassanzadeh@sbu.ac.ir*
- ORCID: 0000-0002-1848-1493
- Homepage: https://mathsci.sbu.ac.ir/~am_hassanzadeh

HOW TO CITE THIS ARTICLE

Rostami, A.; HassanZadeh, A., (2023). Pricing of life insurance products using markovian aging process model. Iran. J. Insur. Res., 12(2): 197-212.

DOI: 10.22056/ijir.2023.03.03

URL: https://ijir.irc.ac.ir/article_160299.html?lang=en