



ORIGINAL RESEARCH PAPER

Calculation of the relative premium of a rate system based on the Poisson model at two points

A.T. Payandeh NajafAbadi*, F. Atatalab, R. Rezazadeh

Department of Actuarial Science, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran

ARTICLE INFO

Article History

Received: 18 July 2018
Revised: 16 August 2018
Accepted: 26 August 2019

ABSTRACT

Purpose: One of the most important issues faced by insurance companies is determining fair premiums. Due to the fact that the record of no loss leads to a discount in the insurance premium, we assume that the insurers present a special behavior in two points i and j . In such a way that the frequency of two points i and j in the observations is significantly high. The purpose of this article is to estimate the relative premium in the rate system under the accumulated Poisson models at these two points.

Methodology: In this research, a Poisson distribution is used to model the desire for reward at two points i and j . The method used is an approximate method based on Bayesian methods for reliable estimators under two loss functions of squared error and Linex.

Findings: The obtained numerical results indicate that if we use the Poisson models at two points, the relative premium will decrease significantly, which has a significant effect on attracting more customers. It was also shown that using the Linux loss function is a good idea to reduce the relative premium of customers.

Conclusion: In a rated system, the insurance records of an insured are used to calculate the fair premium. The issue that was researched in this article is the modeling of insurers' willingness to receive discounts based on not reporting small claims.

The results of this article showed: (1) if we model the phenomenon of customers' willingness to reward using Poisson models, the relative premium rate will decrease significantly; (2) The relative premium estimator under the Lionx loss function is lower than the relative premium under the error squared loss function.

Considering that the reward-penalty system is based on the number of damages, it cannot be a fair system, so it is recommended to use a system that involves both the number and severity of damages in the calculations.

Keywords

*Corresponding Author:

Email: amirtpayande@sbu.ac.ir
DOI: 10.22056/ijir.2019.02.01



محاسبه حق بیمه نسبی یک سیستم نرخ گذاری شده بر اساس مدل پواسون آماسیده در دو نقطه

امیر تیمور پاینده نجف آبادی*، فاطمه عطاطلب، رمضان رضازاده

گروه بیمه‌سنجی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران

چکیده:

هدف: یکی از مهم‌ترین مسائلی است که شرکت‌های بیمه با آن مواجه هستند تعیین حق بیمه عادلانه است. با توجه به این که سابقه عدم خسارت منجر به تخفیف در حق بیمه می‌شود لذا فرض می‌کنیم بیمه‌گذاران نوعی رفتار خاص در دو نقطه A و Z ارائه می‌کنند. به گونه‌ای که به صورت معنی‌داری فراوانی دو نقطه A و Z در مشاهدات زیاد است. هدف این مقاله برآورد حق بیمه نسبی در سیستم نرخ‌گذاری شده تحت مدل‌های پواسون آماسیده در این دو نقطه است. روش‌شناسی: در این تحقیق برای مدل‌بندی اشتیاق برای پاداش از یک توزیع پواسون آماسیده در دو نقطه A و Z استفاده شده است روش مورد استفاده یک روش تقریبی مبتنی بر روش‌های بیزی برای برآوردگرهای باورمندی تحت دو تابع زیان مربع خطا و لاینکس است. یافته‌ها: نتایج عددی به‌دست‌آمده حاکی از آن است که اگر از مدل‌های پواسون آماسیده در دو نقطه استفاده کنیم، حق بیمه نسبی به طور معنی‌داری کاهش می‌یابد، که این امر در جذب مشتریان بیشتر تأثیر به‌سزایی دارد. همچنین نشان داده شد که استفاده از تابع زیان لاینکس ایده مناسبی برای کاهش حق بیمه نسبی مشتریان است. نتیجه‌گیری: در یک سیستم نرخ‌گذاری شده از سوابق بیمه‌ای یک بیمه‌گذار برای محاسبه حق بیمه عادلانه استفاده می‌شود. مسأله‌ای که در این مقاله مورد تحقیق قرار گرفت مدل‌سازی اشتیاق بیمه‌گذاران برای دریافت تخفیف بر مبنای عدم گزارش خسارت‌های کوچک است. نتایج مقاله حاضر نشان داد: (۱) اگر پدیده تمایل به پاداش مشتریان را با استفاده از مدل‌های پواسون آماسیده مدل‌بندی کنیم، نرخ حق بیمه نسبی کاهش چشم‌گیری پیدا می‌کند؛ (۲) برآوردگر حق بیمه نسبی تحت تابع زیان لاینکس کمتر از حق بیمه نسبی تحت تابع زیان مربع خطاست. با توجه به این که سیستم پاداش-جریمه مبتنی بر تعداد خسارت‌هاست نمی‌تواند یک سیستم عادلانه باشد بنابراین توصیه می‌شود از سیستمی استفاده شود که هر دو عامل تعداد و شدت خسارت‌ها را در محاسبات دخیل کند.

اطلاعات مقاله

تاریخ دریافت: ۲۷ تیر ۱۳۹۷
تاریخ داور: ۲۵ مرداد ۱۳۹۷
تاریخ پذیرش: ۰۴ شهریور ۱۳۹۸

کلمات کلیدی

حق بیمه نسبی
توزیع پواسون آماسیده
باورمندی خطی
تابع زیان

*نویسنده مسئول:

ایمیل: amirtpayande@sbu.ac.ir

DOI: 10.22056/ijir.2019.02.01

قیمت گذاری محصولات بیمه‌ای یا به اصطلاح تعیین حق بیمه یکی از مهم‌ترین مسائلی است که شرکت‌های بیمه با آن مواجه‌اند. هدف از یک سیستم نرخ گذاری شده استفاده از سوابق بیمه‌ای بیمه‌گذار برای محاسبه حق بیمه‌ای عادلانه است. مقدار حق بیمه پرداختی توسط بیمه‌گذار در یک سیستم نرخ گذاری شده به عوامل نرخ گذاری دوره جاری و علاوه بر آن، به سابقه خسارتی بیمه‌گذار بستگی دارد. سیستم نرخ گذاری شده بیمه‌گذارانی را که طی یک سال، یک یا تعداد بیشتری ادعای خسارت داشته باشند جریمه می‌کند و به بیمه‌گذارانی که هیچ ادعای خسارتی ندارند تخفیف می‌دهد. هدف از سیستم نرخ گذاری تعیین نرخ حق بیمه آتی بیمه‌گذارهای طبقه‌بندی شده بر مبنای متوسط تعداد ادعای خسارت در t سال گذشته است.

همانند سیستم‌های پاداش - جریمه، حق بیمه در یک سیستم نرخ گذاری شده از ضرب حق بیمه نسبی در حق بیمه پایه به دست می‌آید. حق بیمه نسبی بر اساس فراوانی خسارت‌های ادعا شده و حق بیمه پایه بر اساس شدت خسارت‌های وارده محاسبه می‌شود.

پرتفوی یک شرکت بیمه با n بیمه‌گذار متفاوت را در نظر بگیرید. اگر Y_{ij} نشان‌دهنده تعداد خسارت‌های ادعا شده در بازه زمانی $[j-1, j]$ توسط بیمه‌گذار i ام باشد، مجموع خسارت‌های هر بیمه‌گذار تا زمان t برای $i = 1, 2, \dots, n$ برابر است با:

$$Y_i = \sum_{j=1}^t Y_{ij} \quad (1)$$

و حق بیمه سال $t+1$ ام تحت یک سیستم نرخ گذاری شده برابر است با:

$$P_i(t+1) = BP(t+1) \times Rate(Y_i(t); t) \quad (2)$$

که در آن $BP(t+1)$ حق بیمه پایه سال $(t+1)$ ام برای همه n بیمه‌گذار و $Rate(Y_i(t); t)$ حق بیمه نسبی برای فرد i ام است. حق بیمه نسبی $Rate(Y_i(t); t)$ معمولاً با استفاده از برآوردهای بیز تحت توابع زیان متفاوت در یک سیستم نرخ گذاری شده محاسبه می‌شود (دینویت و دان، ۲۰۰۱).

فرض کنید مجموع تعداد خسارت‌های ادعا شده از سوی بیمه‌گذار i ام تا زمان t ، Y_i ، به شرط پارامتر ریسک $\theta = \theta$ ، دارای توزیع پواسون آماسیده در i و j پارامتر ریسک دارای توزیع پیشین گاما است. هدف از نگارش این مقاله به کارگیری روش تقریبی پاینده (۲۰۱۰)، برای برآورد $Rate(Y_i(t); t)$ تحت توابع زیان مربع خطا و لاینکس است؛ به عبارت دیگر، برآورد $Rate(Y_i(t); t)$ به کمک این رابطه امکان پذیر می‌شود:

$$Rate(Y_i(t); t) = \alpha_{opt}^{(i)} \bar{Y}_i(t) + (1 - \alpha_{opt}^{(i)}) \mu \quad (3)$$

که در آن $\bar{Y}_i(t) := Y_i(t)/t$ و μ میانگین توزیع پیشین است.

در این مقاله، ابتدا به بیان پیشینه پژوهش خواهیم پرداخت و سپس برخی از مفاهیم و تعاریف مورد نیاز برای سایر بخش‌ها ارائه خواهد شد. در بخش بعد، تئوری اصلی را بیان خواهیم کرد و با تلفیق ایده ارائه شده توسط پاینده (۲۰۱۰)، یک روش تقریبی مبتنی بر روش‌های بیزی برای برآوردهای باورمندی تحت دو تابع زیان مربع خطا و لاینکس ارائه خواهیم داد. در ادامه، با استفاده از نتایج به دست آمده در بخش قبل، حق بیمه نسبی برای سیستم پاداش - جریمه ایران را محاسبه خواهیم کرد و در نهایت، در بخش پایانی به نتیجه‌گیری و ارائه پیشنهاد خواهیم پرداخت.

مروری بر پیشینه پژوهش

لانگ^۱ (۱۹۶۹) از ابزارهای آماری و ریاضی برای محاسبه حق بیمه در یک سیستم نرخ گذاری شده استفاده کرد. دینویت و دان (۲۰۰۱) از تابع زیان نمایی برای محاسبه حق بیمه نسبی استفاده کردند. برمودز و همکاران^۲ (۲۰۰۱) نشان دادند که برآوردهای

¹ Denuit & Dhaene

² Lange

³ Bermúdez et al.

باورمندی تحت تابع زیان نمایی کمتر از برآوردگر باورمندی تحت تابع زیان مربع خطا است. موریلو و برموز^۱ (۲۰۰۳) از مدل پواسون گوسین^۲ معکوس برای تعداد ادعاهای گزارش شده استفاده کردند و نتیجه گرفتند که برآوردگر بیز تحت تابع زیان نمایی در مقایسه با تابع زیان مربع خطا بهتر است. بوش و دینویت^۳ (۲۰۰۸) برای محاسبه حق بیمه باورمندی در مدل‌های آماسیده در صفر برای داده‌های پانل استفاده کردند و نشان دادند مدل‌های آماسیده در صفر برای به دست آوردن حق بیمه باورمندی انعطاف پذیرتر هستند. پاینده و محمدپور (۲۰۱۷) از یک مدل رگرسیونی/ توزیع آمیخته دوجمله‌ای منفی آماسیده در k به عنوان یک جایگزین قابل انعطاف به جای مدل رگرسیونی/ توزیع پواسون آماسیده در صفر استفاده کردند.

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این بخش چند تعریف مقدماتی مورد نیاز را بیان می‌کنیم. شرکت‌های بیمه ریسک‌های زیادی را بیمه می‌کنند، شرکت‌ها با هدف نرخ‌گذاری، این ریسک‌ها را در رده‌های مشابه دسته‌بندی می‌کنند. به منظور دسته‌بندی ریسک بیمه‌گذاران و محاسبه حق بیمه نسبی در سیستم نرخ‌گذاری شده لازم است فاکتورهای نامعلومی در محاسبات منظور شوند که باعث پیچیدگی محاسبات می‌شوند. برآوردگر بیز برآوردگر معقول و قابل قبولی برای رفع این مشکل و انجام محاسبات است. متأسفانه، در بسیاری از موارد، برآوردگر بیز به دست آمده را نمی‌توان به فرم برآوردگر باورمندی دقیق بازنویسی کرد. برای حل این مشکل، پاینده (۲۰۱۰) با استفاده از حداقل کردن میانگین مربع خطا روشی را ارائه داد که در آن می‌توان برآوردگر بیز را به صورت تقریبی به فرم برآوردگر باورمندی بازنویسی کرد. لم ۱ از پاینده (۲۰۱۰) نشان می‌دهد چگونه می‌توان برآوردگر بیز را در فرمول باورمندی بیان کرد.

لم ۱. فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n به شرط پارامتر ریسک $\theta = \theta$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با میانگین $\mu(\theta) = E(X|\theta)$ باشند. همچنین فرض کنید پارامتر ریسک θ دارای توزیع پیشین π با میانگین μ باشد، یا به عبارت دیگر $\mu = E_{\pi}(\theta)$ و δ_{π} برآوردگر بیز تحت تابع زیان ρ و تابع پیشین π باشد. آن‌گاه، در میان تمام کلاس برآوردگرهای باورمندی،

$$D := \{\delta(x) = \beta\bar{x} + (1 - \beta)\mu; \beta \in [0,1]\}$$

برآوردگر δ_{opt}

$$\delta_{opt} = \alpha_{opt}\bar{x} + (1 - \alpha_{opt})\mu$$

۴

$$\alpha_{opt} = \frac{E((\bar{x} - \mu)(\delta_{\pi}(x) - \mu))}{E((\bar{x} - \mu)^2)}$$

کمترین فاصله میانگین مربع خطا بین δ_{π} و δ_{β} را دارد. به عبارت دیگر:

$$\delta_{opt} = \operatorname{argmin}(\delta_{\pi}(x) - \delta_{\beta}(x))^2$$

که در آن $x = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ و argmin شناسه مینیمم‌کننده تابع است.

حق بیمه نسبی در سیستم نرخ‌گذاری شده بر مبنای تعداد ادعاهای گزارش شده در یک دوره زمانی محاسبه می‌شود. از این رو، برخی از بیمه‌گذاران ترجیح می‌دهند ادعایی را گزارش ندهند. این پدیده، پدیده اشتیاق برای پاداش نامیده می‌شود که منجر به پدید آمدن تعداد زیادی صفر در مدل می‌شود. این پدیده، در سیستم نرخ‌گذاری شده عادی است و توسط مدل‌های آماسیده در صفر مدل می‌شود (پاینده و همکاران، ۲۰۱۷).

پدیده اشتیاق برای پاداش فقط مختص افراد با صفر ادعا در سال جاری نیست بلکه برای همه افراد در همه رده‌ها صادق است. مسلماً کسانی که در سال جاری حداقل یک خسارت را گزارش داده‌اند، اگر خسارت کوچک دیگری در همین سال به آن‌ها وارد شود، برای جلوگیری از انتقال به رده‌های بالاتر با حق بیمه بیشتر، تمایل ندارند این خسارت کوچک را گزارش دهند یا رفتاری را مرتکب شوند که یک امتیاز منفی محسوب

¹. Morillo & Bermúdez

². Gaussian

³. Boucher & Denuit

شود. به طور مثال، فرض کنید در یک سیستم پاداش-جریمه، قانون انتقال به این صورت باشد که اگر فردی در سال جاری فقط یک بار ادعای خسارت داشته باشد به رده دوم و اگر دو بار ادعای خسارت داشته باشد به رده چهارم منتقل شود؛ بنابراین مشتریانی که قبلاً یک ادعای خسارت داشته‌اند تمایل ندارند به خاطر خسارتی ناچیز به رده‌های بالاتر با حق بیمه بیشتر منتقل شوند.

در این مقاله، فرض می‌کنیم در دو نقطه i و j اشتیاق برای پاداش داشته باشیم. به بررسی پدیده اشتیاق برای پاداش روی توزیع تعداد ادعاها با استفاده از توزیع پواسون آماسیده در این دو نقطه می‌پردازیم و حق بیمه نسبی در سیستم نرخ‌گذاری شده تحت مدل‌های پواسون آماسیده در این دو نقطه را برآورد می‌کنیم. برای این منظور، ابتدا به تعریف تابع توزیع پواسون آماسیده در i و j می‌پردازیم.

تعریف ۱. متغیر تصادفی Y تحت سه پارامتر θ ، ω_1 و ω_2 دارای توزیع پواسون آماسیده در i و j است. $\{i, j\} - IP(\theta, \omega_1, \omega_2)$ هرگاه تابع جرم احتمال آن به شکل زیر باشد:

$$p_Y(y|\theta, \omega_1, \omega_2) = \left(\omega_1 + (1 - \omega_1 - \omega_2) \frac{e^{-\theta} \theta^i}{i!} \right) I_{\{i\}}(y) + \left(\omega_2 + (1 - \omega_1 - \omega_2) \frac{e^{-\theta} \theta^j}{j!} \right) I_{\{j\}}(y) + (1 - \omega_1 - \omega_2) \frac{e^{-\theta} \theta^y}{y!} I_{\{1,2,\dots\}}(y)$$

که در آن $\theta > 0$ و $\omega_1, \omega_2 \in [0, 1]$ ، توزیع $\{i, j\} - IP$ یک ترکیب وزنی از نقاط i و j و تابع جرم احتمال پواسون برای کلیه نقاط است (رضیئی و همکاران، ۲۰۱۶).

در ادامه، توزیع حاشیه‌ای متغیر تصادفی Y را در قالب قضیه ۱ به دست می‌آوریم.

قضیه ۱. فرض کنید متغیر تصادفی Y به شرط $\theta = \theta$ و ω_1, ω_2 دارای توزیع $\{i, j\} - IP(\theta t, \omega_1, \omega_2)$ و همچنین θ دارای توزیع گاما با پارامترهای (β, τ) باشد. آن‌گاه:
الف) توزیع حاشیه‌ای Y برابر است با:

$$p_Y(y) = \begin{cases} \omega_1 + (1 - \omega_1 - \omega_2) \frac{t^i \tau^\beta \Gamma(i + \beta)}{\Gamma(i + 1) \Gamma(\beta) (t + \tau)^{i + \beta}} & , y = i \\ \omega_2 + (1 - \omega_1 - \omega_2) \frac{t^j \tau^\beta \Gamma(j + \beta)}{\Gamma(j + 1) \Gamma(\beta) (t + \tau)^{j + \beta}} & , y = j \\ (1 - \omega_1 - \omega_2) \frac{\Gamma(y + \beta)}{\Gamma(y + 1) \Gamma(\beta)} \left(\frac{t}{t + \tau} \right)^y \left(\frac{\tau}{t + \tau} \right)^\beta & ' y = 0, 1, \dots \\ & ' y \neq i, j \end{cases}$$

ب) تابع چگالی پسین Y برابر است با:

$$p_{\theta|Y}(\theta|y) = \begin{cases} \left(\frac{\omega_1 + (1 - \omega_1 - \omega_2) \frac{e^{-\theta t} (\theta t)^i}{\Gamma(i + 1)}}{\omega_1 + \frac{(1 - \omega_1 - \omega_2) t^i \tau^\beta \Gamma(i + \beta)}{\Gamma(i + \beta) \Gamma(\beta) (t + \tau)^{i + \beta}}} \right) \frac{\tau^\beta \theta^{\beta - 1} e^{-\tau \theta}}{\Gamma(\beta)} & , y = i \\ \left(\frac{\omega_2 + (1 - \omega_1 - \omega_2) \frac{e^{-\theta t} (\theta t)^j}{\Gamma(j + 1)}}{\omega_2 + \frac{(1 - \omega_1 - \omega_2) t^j \tau^\beta \Gamma(j + \beta)}{\Gamma(j + \beta) \Gamma(\beta) (t + \tau)^{j + \beta}}} \right) \frac{\tau^\beta \theta^{\beta - 1} e^{-\tau \theta}}{\Gamma(\beta)} & , y = j \\ \frac{\theta^{y + \beta - 1} e^{-\theta(t + \tau)} (t + \tau)^{y + \beta}}{\Gamma(y + \beta)} & ' y = 0, 1, \dots \\ & ' y \neq i, j \end{cases}$$

برهان الف) می‌دانیم فرم کلی به دست آوردن توزیع حاشیه‌ای به این صورت است:

$$p_Y(y) = \int_0^\infty p_{\theta|Y}(\theta|y) f_\theta(\theta) d\theta$$

بنابراین با توجه به فرم چگالی پیشین، توزیع حاشیه‌ای $\{i,j\}$ -IP را در سه حالت زیر محاسبه می‌کنیم:
 ۱. برای $y=i$:

$$p_Y(y) = \int_0^\infty \left(\omega_1 + (1 - \omega_1 - \omega_2) \frac{e^{-\theta t} (\theta t)^i}{i!} \right) f_\theta(\theta) d\theta$$

$$= \int_0^\infty \omega_1 f_\theta(\theta) d\theta + (1 - \omega_1 - \omega_2) \int_0^\infty \frac{e^{-\theta(t+\tau)} \tau^\beta \theta^{1+\beta-1} t^i}{\Gamma(\beta)\Gamma(i+1)} d\theta$$

قسمت دوم رابطه بالا را در $\frac{(i+\beta)}{(\tau+t)^{i+\beta}}$ ضرب و تقسیم می‌کنیم. در نتیجه خواهیم داشت:

$$p_Y(y) = \omega_1 + (1 - \omega_1 - \omega_2) \frac{t^i \tau^\beta \Gamma(i + \beta)}{\Gamma(i + 1) \Gamma(\beta) (t + \tau)^{i+\beta}} \quad (4)$$

۲. برای $y=j$ ، برهان مشابه حالت $y=i$ است. فقط کافی است در رابطه (۴) به جای i ، j را قرار دهیم.

$$p_Y(y) = \omega_2 + (1 - \omega_1 - \omega_2) \frac{t^j \tau^\beta \Gamma(j + \beta)}{\Gamma(j + 1) \Gamma(\beta) (t + \tau)^{j+\beta}}$$

۳. برای $y \neq i, j, y = 0, 1, 2, \dots$ ، توزیع حاشیه‌ای به این صورت است:

$$p_Y(y) = \int_0^\infty (1 - \omega_1 - \omega_2) \frac{e^{-\theta t} (\theta t)^y e^{-\theta \tau} \tau^\beta \theta^{\beta-1}}{y!} d\theta$$

$$= (1 - \omega_1 - \omega_2) \int_0^\infty \frac{e^{-\theta(t+\tau)} \tau^\beta t^y \theta^{y+\beta-1}}{\Gamma(\beta)\Gamma(y+1)} d\theta$$

رابطه بالا را در عبارت $\frac{(y+\beta)}{(\tau+t)^{y+\beta}}$ ضرب و تقسیم می‌کنیم، لذا داریم:

$$p_Y(y) = (1 - \omega_1 - \omega_2) \frac{\Gamma(y + \beta)}{\Gamma(y + 1) \Gamma(\beta)} \left(\frac{t}{t + \tau} \right)^y \left(\frac{\tau}{t + \tau} \right)^\beta$$

به این ترتیب، برهان قسمت الف کامل می‌شود.

برهان ب) می‌دانیم توزیع پسین به این شکل محاسبه می‌شود:

$$p_{\theta|Y}(\theta|y) = \frac{\pi(\theta) p_{Y|\theta}(y|\theta)}{p_Y(y)} \quad (5)$$

در حالتی که $y=i, j$ کافی است $\pi(\theta)$ ، $p_{Y|\theta}(y=i, j|\theta)$ ، $p_Y(y=i, j)$ به دست آمده را در رابطه (۵) جای گذاری کنیم. بدین ترتیب برهان قسمت ب کامل می‌شود. برای $y \neq i, j$ ، با استفاده از رابطه (۵)، داریم:

$$p_{\theta|Y}(\theta|y) = \frac{(1 - \omega_1 - \omega_2) \frac{e^{-\theta t} (\theta t)^y \tau^\beta \theta^{\beta-1} e^{-\theta \tau}}{y! \Gamma(\beta)}}{(1 - \omega_1 - \omega_2) \frac{\Gamma(y + \beta)}{\Gamma(y + 1) \Gamma(\beta)} \left(\frac{t}{t + \tau} \right)^y \left(\frac{\tau}{t + \tau} \right)^\beta}$$

$$= \frac{\theta^{y+\beta-1} e^{-\theta(t+\tau)}}{\Gamma(y + \beta) \left(\frac{1}{t + \tau} \right)^y \left(\frac{1}{t + \tau} \right)^\beta}$$

$$= \frac{\theta^{y+\beta-1} e^{-\theta(t+\tau)} (t + \tau)^{y+\beta}}{\Gamma(y + \beta)}$$

محاسبه عامل باورمندی بر مبنای توزیع پواسون آماسیده در $\mathbf{I} \text{ و } \mathbf{J}$

اگر تعداد ادعاها به شرط پارامتر ریسک $\theta = \theta$ دارای توزیع $\{i,j\}$ -IP و پارامتر ریسک دارای توزیع پیشین گاما باشد، به سادگی می‌توان نشان داد برآوردگر بیز به دست آمده تحت تابع زیان مربع خطا و لاینکس را نمی‌توان به فرم برآوردگر باورمندی دقیق بازنویسی کرد. بنابراین برای اینکه بتوانیم به طور تقریبی برآوردگر بیز را به فرم برآوردگر باورمندی بازنویسی کنیم، از لم ۱ برای تقریب زدن برآوردگر باورمندی در این

بخش استفاده می‌کنیم.

فرض کنید پرتفوی یک شرکت بیمه شامل n بیمه‌گذار است. همچنین فرض کنید تحت سیستم نرخ‌گذاری شده، حق بیمه نسبی سال $(t+1)$ ام براساس معادله (۲) محاسبه می‌شود. در این بخش به بررسی تأثیر پدیده اشتیاق برای پاداش روی توزیع تعداد ادعاها با استفاده از توزیع پواسون آماسیده $IP\{i,j\}$ پرداخته و حق بیمه نسبی را تحت دو تابع زیان مربع خطا و لاینکس محاسبه می‌کنیم.

قضیه ۲. فرض کنید متغیر تصادفی Y (توزیع تعداد خسارت‌ها تا زمان t) برای پارامتر داده شده $\theta = \theta$ دارای توزیع پواسون آماسیده در i و j با پارامتر ریسک θ باشد. همچنین اگر θ دارای توزیع پیشین $gamma(\beta, \tau)$ باشد، آن‌گاه حق بیمه نسبی $Rate_{Quad}(Y; t)$ تحت تابع زیان مربع خطا برای بیمه‌گذار t ام به این صورت است:

$$Rate_{Quad}(\bar{Y}; t) = \alpha_{opt}^{(i)} \bar{Y} + \left(1 - \alpha_{opt}^{(i)}\right) \frac{\beta}{\tau}$$

که در آن

$$\alpha_{opt}^{(i)} = \frac{E(\bar{Y}\delta_{\pi}(Y)) + E(Y)E(\delta_{\pi}(Y))}{\frac{1}{t} var(Y)}$$

برهان. با استفاده از قضیه ۱ می‌توان نشان داد برآوردگر بیز تحت تابع زیان مربع خطا به صورت زیر است:

$$\delta_{\pi}(Y) = \left[\frac{\beta \omega_1}{\tau \left(\omega_1 + \frac{(1 - \omega_1 - \omega_2) t^i \tau^{\beta} \Gamma(i + \beta)}{\Gamma(i + 1) \Gamma(\beta) (t + \tau)^{i + \beta}} \right)} + \frac{(1 - \omega_1 - \omega_2) t^i \tau^{\beta} \Gamma(i + \beta + 1)}{\Gamma(i + 1) \Gamma(\beta) (t + \tau)^{i + \beta + 1}} \right] I_{\{i\}}(y) \\ + \left[\frac{\beta \omega_2}{\tau \left(\omega_2 + \frac{(1 - \omega_1 - \omega_2) t^j \tau^{\beta} \Gamma(j + \beta)}{\Gamma(j + 1) \Gamma(\beta) (t + \tau)^{j + \beta}} \right)} + \frac{(1 - \omega_1 - \omega_2) t^j \tau^{\beta} \Gamma(j + \beta + 1)}{\Gamma(j + 1) \Gamma(\beta) (t + \tau)^{j + \beta + 1}} \right] I_{\{j\}}(y) \\ + \left[\frac{y + \beta}{t + \tau} \right] I_{\{0, 1, \dots\}}(y)_{y \neq i, j}$$

برای محاسبه $\alpha_{opt}^{(i)}$ ابتدا باید $E[\bar{Y}(t)\delta_{\pi}(Y(t))]$ و $E[\delta_{\pi}(Y(t))]$ را محاسبه کنیم:

$$E[\bar{Y}(t)\delta_{\pi}(Y)] = \left[\frac{i}{t} \delta_{\pi}(i) \right] P_Y(i) + \left[\frac{j}{t} \delta_{\pi}(j) \right] P_Y(j) + \sum_{\substack{Y=0, 1, \dots \\ y \neq i, j}} \frac{Y}{t} \delta_{\pi}(Y) P(Y) \\ = \\ \frac{i}{t} \left(\frac{\beta \omega_1}{\tau \left(\omega_1 + \frac{(1 - \omega_1 - \omega_2) t^i \tau^{\beta} \Gamma(i + \beta)}{\Gamma(i + 1) \Gamma(\beta) (t + \tau)^{i + \beta}} \right)} + \frac{(1 - \omega_1 - \omega_2) t^i \tau^{\beta} \Gamma(i + \beta + 1)}{\Gamma(i + 1) \Gamma(\beta) (t + \tau)^{i + \beta + 1}} \right) \times \left(\omega_1 + \frac{(1 - \omega_1 - \omega_2) t^i \tau^{\beta} \Gamma(i + \beta)}{\Gamma(i + 1) \Gamma(\beta) (t + \tau)^{i + \beta}} \right) + \\ \frac{j}{t} \left(\frac{\beta \omega_2}{\tau \left(\omega_2 + \frac{(1 - \omega_1 - \omega_2) t^j \tau^{\beta} \Gamma(j + \beta)}{\Gamma(j + 1) \Gamma(\beta) (t + \tau)^{j + \beta}} \right)} + \frac{(1 - \omega_1 - \omega_2) t^j \tau^{\beta} \Gamma(j + \beta + 1)}{\Gamma(j + 1) \Gamma(\beta) (t + \tau)^{j + \beta + 1}} \right) \times \left(\omega_2 + \frac{(1 - \omega_1 - \omega_2) t^j \tau^{\beta} \Gamma(j + \beta)}{\Gamma(j + 1) \Gamma(\beta) (t + \tau)^{j + \beta}} \right) + \\ \sum_{\substack{Y=0, 1, \dots \\ y \neq i, j}}^{\infty} \frac{y}{t} \frac{y + \beta}{t + \tau} \frac{(1 - \omega_1 - \omega_2) \Gamma(y + \beta)}{\Gamma(y + 1) \Gamma(\beta)} \left(\frac{t}{t + \tau} \right)^y \left(\frac{\tau}{t + \tau} \right)^{\beta} \\ = \\ \frac{i}{t} \left(\frac{\beta \omega_1}{\tau} + \frac{(1 - \omega_1 - \omega_2) \Gamma(i + \beta + 1) t^i \tau^{\beta}}{\Gamma(i + 1) \Gamma(\beta) (t + \tau)^{i + \beta + 1}} \right) + \frac{j}{t} \left(\frac{\beta \omega_2}{\tau} + \frac{(1 - \omega_1 - \omega_2) \Gamma(j + \beta + 1) t^j \tau^{\beta}}{\Gamma(j + 1) \Gamma(\beta) (t + \tau)^{j + \beta + 1}} \right) + \\ \sum_{\substack{Y=0, 1, \dots \\ y \neq i, j}}^{\infty} \frac{(1 - \omega_1 - \omega_2) \Gamma(y + \beta + 1)}{t(t + \tau) \Gamma(y) \Gamma(\beta)} \left(\frac{t}{t + \tau} \right)^y \left(\frac{\tau}{t + \tau} \right)^{\beta}$$

از این رو:

$$E[\bar{Y}\delta_\pi(Y)] = \frac{i}{t\tau}\beta\omega_1 + \frac{j}{t\tau}\beta\omega_2 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)\beta(\beta+1)}{\tau^2}$$

9

$$E[\delta_\pi(Y)] = [\delta_\pi(Y=i)]P_Y(y=i) + [\delta_\pi(Y=j)]P_Y(y=j) + \sum_{\substack{Y=0,1,\dots \\ y \neq i,j}}^{\infty} \delta_\pi(Y)P_Y(y)$$

$$E[\delta_\pi(Y)] = \left(\frac{\beta\omega_1}{\tau} + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i\tau^\beta\Gamma(i+\beta+1)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta+1}}\right) + \left(\frac{\beta\omega_2}{\tau} + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^j\tau^\beta\Gamma(j+\beta+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta+1}}\right) + \sum_{\substack{Y=0,1,\dots \\ y \neq i,j}}^{\infty} \frac{(1-\omega_1-\omega_2)\Gamma(y+\beta+1)}{(t+\tau)\Gamma(y+1)\Gamma(\beta)} \left(\frac{t}{t+\tau}\right)^y \left(\frac{\tau}{t+\tau}\right)^\beta$$

بنابراین:

$$E[\delta_\pi(Y)] = \frac{\beta\omega_1}{\tau} + \frac{\beta\omega_2}{\tau} + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)\beta}{\tau}$$

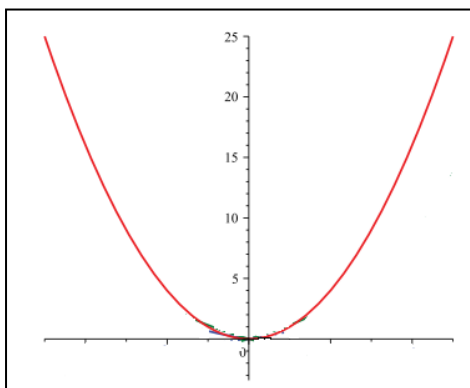
با جای گذاری روابط بالا در لم ۱ برهان کامل می شود.

بسیاری از آموزه های آمار کلاسیک، بر پایه تابع زیان مربع خطا استوار است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$L(\theta, \hat{\theta}) = (\theta - \hat{\theta})^2$$

این تابع زیان از دیدگاه تئوری باعث سادگی محاسبات ریاضی در حصول برآوردها می شود. نمودار ۱ رفتار تابع زیان مربع خطا را نشان

می دهد.



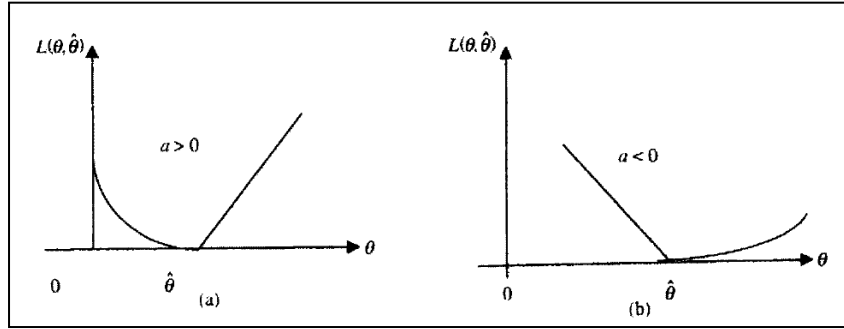
نمودار ۱: تابع زیان مربع خطا

تابع زیان مربع خطا جریمه های یکسانی را به خطاهای مثبت و منفی در هنگام برآورد می دهد. این امر باعث می شود که جریمه خطای بیش برآورد و کم برآورد یکسان باشد. از دیدگاه کاربردی، با توجه به اینکه معمولاً زیان های حاصل از خطای بیش برآورد و خطای کم برآورد اهمیت یکسانی ندارند، استفاده از این تابع زیان توجیه پذیر نیست. برآورد کم حق بیمه برای شرکت بیمه بسیار خطرناک تر از برآورد زیاد آن است. در مباحث نرخ گذاری بیمه می توان گفت برآوردها بیز تحت تابع زیان مربع خطا، هیچ تمایز معنی داری بین بیش برآورد و یا کم برآورد حق بیمه قائل نمی شود. بنابراین بهتر است از یک تابع زیان نامتقارن برای برآورد استفاده شود. شاید بتوان گفت تابع زیان نامتقارن لاینکس جایگزین مناسبی برای تابع زیان مربع خطا است. این تابع زیان جریمه متفاوتی بین بیش برآورد و یا کم برآورد حق بیمه قائل می شود. فرم

ریاضی تابع زیان لاینکس به این صورت است:

$$L_{Linex} = \exp\{a(\hat{\theta} - \theta)\} - a(\hat{\theta} - \theta) - 1$$

که در آن $b > 0$ و $a \neq 0$ است. نمودار ۲ رفتار تابع زیان لاینکس را نسبت به حالت‌های مختلف a به تصویر می‌کشد.



نمودار ۲: (a) تابع زیان لاینکس برای $a > 0$ و (b) تابع زیان لاینکس برای $a < 0$

قضیه ۳ حق بیمه نسبی $Rate_{LINEX}(Y; t)$ را تحت تابع زیان لاینکس ارائه می‌کند.

قضیه ۳. فرض کنید متغیر تصادفی Y (توزیع تعداد خسارت‌ها تا زمان t) برای پارامتر داده شده $\theta = \Theta$ ، دارای توزیع پواسون آماسیده در i و j با پارامتر شدت θ باشد. همچنین اگر θ دارای توزیع پیشین $gamma(\beta, \tau)$ باشد، آن‌گاه حق بیمه نسبی $Rate_{LINEX}(Y; t)$ ، تحت تابع زیان لاینکس برای فرد t ام به صورت زیر است:

$$Rate_{LINEX}(\bar{Y}; t) = \alpha_{opt}^{(i)} \bar{Y} + (1 - \alpha_{opt}^{(i)}) \frac{\beta}{\tau}$$

که در آن:

$$\alpha_{opt}^{(i)} = \frac{E(\bar{Y} \delta_{\pi}(Y)) + E(Y)E(\delta_{\pi}(Y))}{\frac{1}{t} var(Y)}$$

برهان. برآوردگر بیز تحت تابع زیان لاینکس از این رابطه به دست می‌آید:

$$\delta_{\pi}(Y) = -\frac{1}{a} (E_{\pi}(e^{-a\theta} | y))$$

9

$$E(e^{-a\theta} | y) = E(e^{-a\theta} | y = i) + E(e^{-a\theta} | y = j) + E(e^{-a\theta} | y = 0, 1, \dots \neq i, j)$$

بنابراین با توجه به قضیه ۱، برآوردگر بیز به صورت زیر است:

$$\delta_{\pi}(y) = -\frac{1}{a} \ln \left[\frac{\frac{\omega_1 \tau^{\beta}}{(\tau+a)^{\beta}}}{\left(\omega_1 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i \tau^{\beta} \Gamma(i+\beta)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta}} \right)} + \frac{\frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i \tau^{\beta} \Gamma(i+\beta+1)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta+1}}}{\omega_1 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i \tau^{\beta} \Gamma(i+\beta)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta}}} \right] I_{\{i\}}(y)$$

$$+ -\frac{1}{a} \ln \left[\frac{\frac{\omega_2 \tau^{\beta}}{(\tau+a)^{\beta}}}{\left(\omega_2 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^j \tau^{\beta} \Gamma(j+\beta)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta}} \right)} + \frac{\frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^j \tau^{\beta} \Gamma(j+\beta+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta+1}}}{\omega_2 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^j \tau^{\beta} \Gamma(j+\beta)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta}}} \right] I_{\{j\}}(y) - \frac{1}{a} \ln \left[\left(\frac{t+\tau}{t+\tau+a} \right)^{y+\beta} \right] I_{\{0,1,\dots\}}(y)$$

اکنون باید $E[\bar{Y}\delta_{\pi}(Y)]$ و $E[\delta_{\pi}(Y)]$ را محاسبه کنیم:

$$E[\bar{Y}\delta_{\pi}(Y)] = \left[\frac{i}{t} \delta_{\pi}(i) \right] P_Y(i) + \left[\frac{j}{t} \delta_{\pi}(j) \right] P_Y(j) + \sum_{\substack{Y=0,1,\dots \\ y \neq i,j}} \delta_{\pi}(y) P_Y(y)$$

$$= -\frac{i}{ta} \ln \left[\frac{\frac{\omega_1 \tau^{\beta}}{(\tau+a)^{\beta}}}{\left(\omega_1 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i \tau^{\beta} \Gamma(i+\beta)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta}} \right)} + \frac{\frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i \tau^{\beta} \Gamma(i+\beta+1)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta+1}}}{\omega_1 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i \tau^{\beta} \Gamma(i+\beta)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta}}} \right]$$

$$\times \left(\omega_1 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i \tau^{\beta} \Gamma(i+\beta)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta}} \right)$$

$$- \frac{j}{ta} \ln \left[\frac{\frac{\omega_2 \tau^{\beta}}{(\tau+a)^{\beta}}}{\left(\omega_2 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^j \tau^{\beta} \Gamma(j+\beta)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta}} \right)} + \frac{\frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^j \tau^{\beta} \Gamma(j+\beta+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta+1}}}{\omega_2 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^j \tau^{\beta} \Gamma(j+\beta)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta}}} \right]$$

$$\times \left(\omega_2 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^j \tau^{\beta} \Gamma(j+\beta)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta}} \right)$$

$$+ \sum_{\substack{Y=0,1,\dots \\ y \neq i,j}} \frac{y(y+\beta)}{ta} \ln \left(\frac{t+\tau+a}{t+\tau} \right) \frac{(1-\omega_1-\omega_2)\Gamma(y+\beta)}{\Gamma(y+1)\Gamma(\beta)} \left(\frac{t}{t+\tau} \right)^y \left(\frac{\tau}{t+\tau} \right)^{\beta}$$

پس از ساده کردن عبارت بالا داریم:

$$\begin{aligned}
 E[\bar{Y}\delta_\pi(Y)] = & -\frac{i}{ta} \ln \left[\frac{\frac{\omega_1 \tau^\beta}{(\tau+a)^\beta}}{\left(\omega_1 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i \tau^\beta \Gamma(i+\beta)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta}}\right)} + \frac{\frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i \tau^\beta \Gamma(i+\beta+1)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta+1}}}{\omega_1 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i \tau^\beta \Gamma(i+\beta)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta}}} \right] \\
 & \times P_Y(Y=i) \\
 & -\frac{j}{ta} \ln \left[\frac{\frac{\omega_2 \tau^\beta}{(\tau+a)^\beta}}{\left(\omega_2 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^j \tau^\beta \Gamma(j+\beta)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta}}\right)} \right. \\
 & \left. + \frac{\frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^j \tau^\beta \Gamma(j+\beta+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta+1}}}{\omega_2 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^j \tau^\beta \Gamma(j+\beta)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta}}} \right] P_Y(Y=j) + (1 - \binom{i+\beta}{i-1}) \left(\frac{t}{t+\tau}\right)^{i-1} \left(\frac{\tau}{t+\tau}\right)^{\beta+2} \\
 & - \binom{j+\beta}{j-1} \left(\frac{t}{t+\tau}\right)^{j-1} \left(\frac{\tau}{t+\tau}\right)^{\beta+2} \times \left(\frac{(1-\omega_1-\omega_2)(t+\tau)}{\tau^2 a} \ln\left(\frac{t+\tau+a}{t+\tau}\right)\right)
 \end{aligned}$$

9

$$\begin{aligned}
 E[\delta_\pi(Y)] &= [\delta_\pi(Y=i)]P_Y(y=i) + [\delta_\pi(Y=j)]P_Y(y=j) \\
 & \quad + \sum_{\substack{y=0,1,\dots \\ y \neq i,j}}^{\infty} \delta_\pi(Y)P_Y(y) \\
 &= -\frac{1}{a} \ln \left[\frac{\frac{\omega_1 \tau^\beta}{(\tau+a)^\beta}}{\left(\omega_1 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i \tau^\beta \Gamma(i+\beta)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta}}\right)} + \frac{\frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i \tau^\beta \Gamma(i+\beta+1)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta+1}}}{\omega_1 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i \tau^\beta \Gamma(i+\beta)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta}}} \right] \\
 & \quad \times \left(\omega_1 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i \tau^\beta \Gamma(i+\beta)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta}}\right) \\
 & \quad -\frac{1}{a} \ln \left[\frac{\frac{\omega_2 \tau^\beta}{(\tau+a)^\beta}}{\left(\omega_2 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^j \tau^\beta \Gamma(j+\beta)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta}}\right)} + \frac{\frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^j \tau^\beta \Gamma(j+\beta+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta+1}}}{\omega_2 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^j \tau^\beta \Gamma(j+\beta)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta}}} \right] \\
 & \quad \times \left(\omega_2 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^j \tau^\beta \Gamma(j+\beta)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta}}\right) \\
 & \quad + \sum_{\substack{y=0,1,\dots \\ y \neq i,j}}^{\infty} \frac{(y+\beta)}{a} \ln\left(\frac{t+\tau+a}{t+\tau}\right) \frac{(1-\omega_1-\omega_2)\Gamma(y+\beta)}{\Gamma(y+1)\Gamma(\beta)} \left(\frac{t}{t+\tau}\right)^y \left(\frac{\tau}{t+\tau}\right)^\beta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{a} \ln \left[\frac{\frac{\omega_1 \tau^\beta}{(\tau+a)^\beta}}{P_Y(y=i)} + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i \tau^\beta \Gamma(i+\beta+1)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta+1}} \right] \times P_Y(y=i) \\
 &\quad - \frac{1}{a} \ln \left[\frac{\frac{\omega_2 \tau^\beta}{(\tau+a)^\beta}}{P_Y(y=j)} + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^j \tau^\beta \Gamma(j+\beta+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta+1}} \right] \times P_Y(y=j) + (1 \\
 &\quad - \binom{i+\beta}{i-1} \left(\frac{t}{t+\tau}\right)^{i-1} \left(\frac{\tau}{t+\tau}\right)^{\beta+1} - \binom{j+\beta}{j-1} \left(\frac{t}{t+\tau}\right)^{j-1} \left(\frac{\tau}{t+\tau}\right)^{\beta+1}) \\
 &\quad \times \left(\frac{\beta(1-\omega_1-\omega_2)(t+\tau)}{\tau a} \ln \left(\frac{t+\tau+a}{t+\tau} \right) \right)
 \end{aligned}$$

با جای گذاری دو امید ریاضی بالا در لم ۱، برهان کامل می شود.

ارائه یک مثال واقعی

با استفاده از نتایج بخش قبل، در این بخش به محاسبه حق بیمه نسبی تحت تابع زیان مربع خطا و لاینکس برای بعضی از وسایل نقلیه ای که در سیستم پاداش - جریمه بیشترین تعداد را دارند و دارای بیمه شخص ثالث هستند، می پردازیم. همچنین برای برآورد پارامترهای توزیع ادعا از روش برآوردگر بیز تجربی استفاده خواهیم کرد. توزیع فراوانی خسارت و برازش پارامترهای توزیع پواسون آماسیده به صورت جدول و نموداری بررسی شده است. داده های مورد بررسی مربوط به اطلاعات خسارت بیمه گذاران رشته بیمه شخص ثالث اتومبیل در سال ۱۳۸۹ برای صنعت بیمه ایران است. اطلاعات به دست آمده برای هر وسیله نقلیه براساس یک سال (۱۳۸۹) جمع آوری شده است، بنابراین متغیر زمان (t) برای تعیین حق بیمه وسایل نقلیه برابر یک است اما به منظور مطالعات مقایسه ای بیشتر فرض می کنیم این اطلاعات در مدت زمان بیشتری جمع آوری شده اند (مثلاً $t=2$). با استفاده از داده های بانک اطلاعاتی بیمه مرکزی برای پدیده تمایل به پاداش بیمه گذاران از اختلاف احتمال تصادف برای هر وسیله نقلیه و احتمال ادعای گزارش استفاده کرده ایم. در ادامه به محاسبه حق بیمه نسبی به تفکیک وسایل نقلیه می پردازیم.

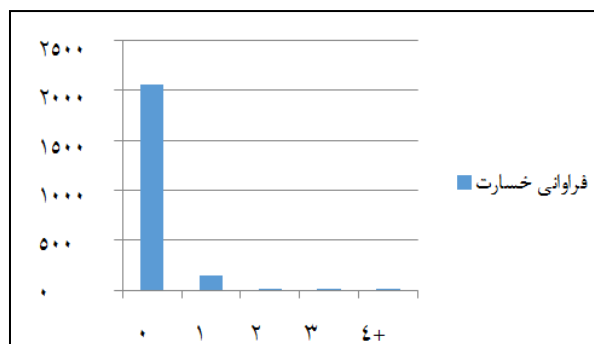
اتومبیل سواری نوع ۱ (کمتر از ۴ سیلندر):

این گروه کمترین درصد اعلام خسارت را نسبت به سایر سواری ها داشته اند. اطلاعات مربوط به این نوع بیمه نامه در جدول ۱ و نمودار ۳ ارائه شده است.

جدول ۱: توزیع تعداد اعلام خسارت ها برای اتومبیل سواری نوع یک

تعداد خسارت های اعلام شده (k)	فراوانی (تعداد بیمه نامه با k ادعای خسارت)	درصد فراوانی	درصد فراوانی تجمعی
۰	۲۰۵۵	۹۲/۸۵	۹۲/۸۵
۱	۱۴۸	۶/۶۵	۹۹/۵۰
۲	۵	۰/۲۵	۹۹/۷۵
۳	۳	۰/۱۵	۹۹/۹۰
۴ و بیشتر	۲	۰/۱۰	۱۰۰

منبع: یافته های محققان

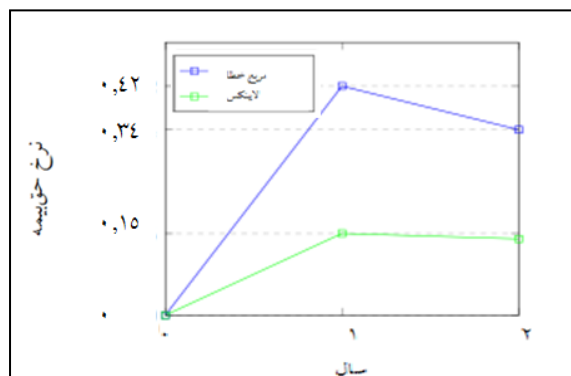


نمودار ۳: فراوانی خسارت اتومبیل سواری نوع ۱

با استفاده از داده‌ها، پارامترهای مدل برای این وسیله نقلیه بدین صورت برآورد می‌شود:

$$a = 0.5, \quad \omega_1 = 0.05, \quad \omega_2 = 0.01, \quad \beta = 7, \quad \tau = 0.009$$

در نمودار ۴ حق بیمه نسبی محاسبه شده تحت دو تابع زیان مربع خطا و لاینکس برای این وسیله نقلیه با استفاده از نتایج قضیه‌های ۲ و ۳ به دست آمده است. این نمودار نشان می‌دهد برآوردگر حق بیمه نسبی، با استفاده از توزیع پواسون آماسیده در صفر و یک، تحت تابع زیان لاینکس، کمتر از این حق بیمه نسبی تحت تابع زیان مربع خطاست. همچنین نشان می‌دهد پدیده اشتیاق به پاداش برای ادعاها، تأثیر چشم‌گیری در میزان حق بیمه نسبی خواهد داشت.



نمودار ۴: نرخ حق بیمه نسبی تحت مدل پواسون آماسیده در صفر و یک برای سواری نوع ۱

اتومبیل سواری نوع ۲ (۴ سیلندر):

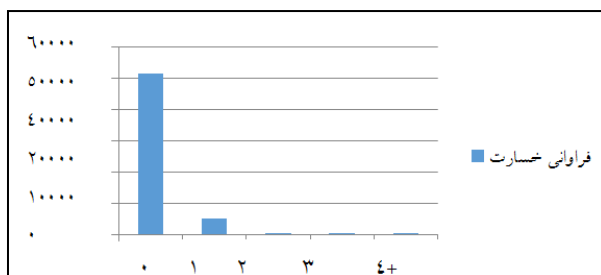
اطلاعات مربوط به خسارت‌های این نوع وسیله نقلیه در جدول ۲ و نمودار ۵ ارائه شده است. این وسیله نقلیه از نظر میزان عدم ارائه خسارت در بین سواری‌ها در مقام دوم قرار دارد.

جدول ۲: توزیع تعداد اعلام خسارت‌ها برای اتومبیل سواری نوع ۲

تعداد خسارت‌های اعلام شده (k)	فراوانی (تعداد بیمه‌نامه با k ادعای خسارت)	درصد فراوانی	درصد فراوانی تجمعی
۰	۵۱۴۷۹	۹۰/۲۵	۹۰/۲۵
۱	۵۲۷۵	۹/۲۵	۹۹/۵۰
۲	۲۷۰	۰/۴۷	۹۹/۹۷
۳	۱۰	۰/۰۲	۹۹/۹۹
۴ و بیشتر	۷	۰/۰۱	۱۰۰

منبع: یافته‌های محققان

محاسبه حق بیمه نسبی یک سیستم نرخ گذاری شده بر اساس مدل پواسون آماسیده در دو نقطه

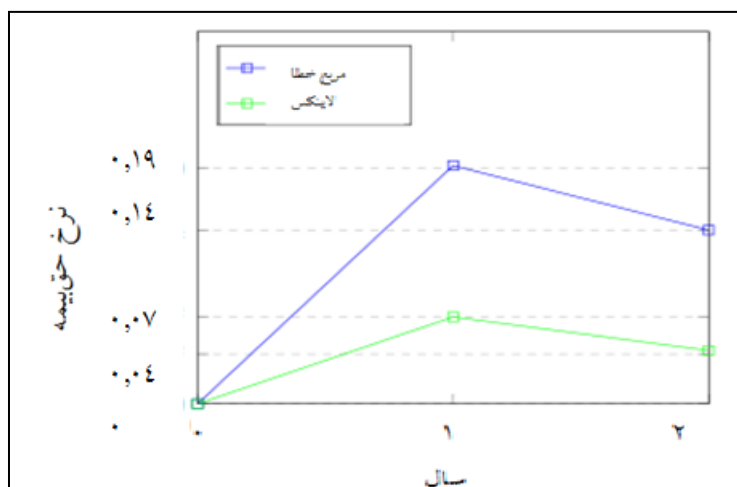


نمودار ۵: فراوانی خسارت اتومبیل سواری نوع ۲

با استفاده از داده‌ها، پارامترهای مدل برای این وسیله نقلیه به نمودار زیر برآورد می‌شود:

$$a = 0.5, \quad \omega_1 = 0.1, \quad \omega_2 = 0.01, \quad \beta = 8, \quad \tau = 0.0007$$

در نمودار ۶ نرخ حق بیمه نسبی محاسبه شده تحت دو تابع زیان مربع خطا و لاینکس برای این وسیله نقلیه نشان داده شده است. چنان‌که مشخص است، برآوردگر حق بیمه نسبی با استفاده از توزیع پواسون آماسیده در صفر و یک تحت تابع زیان لاینکس کمتر از حق بیمه نسبی محاسبه شده تحت تابع زیان مربع خطاست.



نمودار ۶: نرخ حق بیمه نسبی تحت مدل پواسون آماسیده در صفر و یک برای سواری نوع ۲

اتومبیل سواری نوع ۳ (۴ سیلندر به بالا):

با توجه به اطلاعات ارائه شده در جدول ۳ و نمودار ۷، بدترین گروه از لحاظ تعداد خسارت، در بین سواری‌ها را می‌توان اتومبیل‌های سواری نوع ۳ (۴ سیلندر به بالا) دانست. میزان تقریبی ۱۵ درصد اعلام حداقل یک خسارت، این گروه را به پرحادثه‌ترین گروه تبدیل کرده است.

جدول ۳: توزیع تعداد اعلام خسارت‌ها برای اتومبیل سواری نوع ۳

تعداد خسارت‌های اعلام شده (k)	فراوانی (تعداد بیمه‌نامه با k ادعای خسارت)	درصد فراوانی	درصد فراوانی تجمعی
۰	۲۳۷۳۰	۸۵/۷۰	۸۵/۷۰
۱	۳۶۵۵	۱۳/۲۰	۹۸/۹۰
۲	۲۸۰	۱/۰۱	۹۹/۹۱
۳	۱۹	۰/۰۷	۹۹/۹۸
۴ و بیشتر	۵	۰/۰۲	۱۰۰

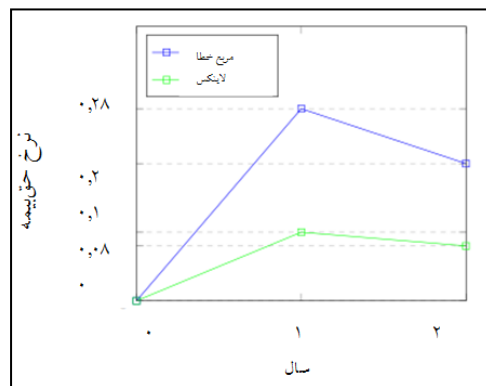
منبع: یافته‌های محققان



با استفاده از داده‌ها، پارامترهای مدل برای این وسیله نقلیه به این صورت برآورد می‌شود:

$$a = 0.5, \quad \omega_1 = 0.1, \quad \omega_2 = 0.01, \quad \beta = 5, \quad \tau = 0.01$$

در نمودار ۸ حق بیمه نسبی محاسبه شده تحت دو تابع زیان مربع خطا و لاینکس برای این وسیله نقلیه نشان داده شده است. این نمودار نیز نشان می‌دهد برآوردگر حق بیمه نسبی با استفاده از توزیع پواسون آماسیده در صفر و یک تحت تابع زیان لاینکس کمتر از حق بیمه نسبی تحت تابع زیان مربع خطاست.



نمودار ۸: نرخ حق بیمه نسبی تحت مدل پواسون آماسیده در صفر و یک برای سواری نوع ۳

جمع‌بندی و پیشنهادها

در یک سیستم نرخ‌گذاری شده از سوابق بیمه‌ای یک بیمه‌گذار برای محاسبه حق بیمه عادلانه استفاده می‌شود. مقدار حق بیمه پرداختی توسط بیمه‌گذار، به عوامل نرخ‌گذاری دوره جاری و علاوه بر آن، به سابقه خسارتی او بستگی دارد. هر چه بیمه‌گذاران در طی یک سال تعداد بیشتری ادعای خسارت داشته باشند باید حق بیمه بیشتری بپردازند و در مقابل به بیمه‌گذارانی که هیچ ادعای خسارتی ندارند تخفیف تعلق می‌گیرد. بسیاری از بیمه‌گذاران جهت جلوگیری از افزایش حق بیمه، سعی می‌کنند خسارت‌های کوچک را به شرکت بیمه گزارش نکنند. مسئله‌ای که در این مقاله مورد تحقیق قرار گرفته مدل‌سازی اشتیاق بیمه‌گذاران برای دریافت تخفیف بر مبنای عدم گزارش خسارت‌های کوچک است.

در سیستم نرخ‌گذاری شده سابقه t سال قبل افراد حائز اهمیت است و حق بیمه نسبی آن‌ها بر اساس تعداد خسارت‌ها در t سال قبل به دست می‌آید. به عبارت دیگر، حق بیمه نسبی ضریبی از حق بیمه است که بر اساس فراوانی خسارت‌های ادعا شده محاسبه می‌شود و حق بیمه پایه بر اساس شدت خسارت‌های وارده. در یک سیستم نرخ‌گذاری شده، حق بیمه از ضرب حق بیمه نسبی در حق بیمه پایه به دست می‌آید. در این سیستم، طبقه‌ای برای قرار گرفتن افراد بر حسب سابقه خسارت وجود ندارد، در حالی که در سیستم پاداش-جریمه کلاسیک، ابتدا طبقاتی را می‌سازند و افراد را بر حسب سابقه خسارتشان در طبقات قرار می‌دهند و سپس با قانون انتقال و سابقه سال قبل افراد، آن‌ها را در طبقات

جابه‌جا می‌کنند.

با توجه به اینکه برآوردگر باورمندی دقیق برای توزیع‌های پواسون - گامای آماسیده برقرار نیست، در این مقاله، برآوردگر باورمندی خطی با استفاده از ایده‌آرائه‌شده توسط پاینده (۲۰۱۰) و به‌وسیله برآوردگرهای بیز تقریب زده شد.

نتایج مقاله حاضر نشان داد:

۱. اگر پدیده تمایل به پاداش مشتریان را با استفاده از مدل‌های پواسون آماسیده مدل‌بندی کنیم، نرخ حق‌بیمه نسبی کاهش چشم‌گیری پیدا می‌کند.

۲. برآوردگر حق‌بیمه نسبی تحت تابع زیان لاینکس کمتر از حق‌بیمه نسبی تحت تابع زیان مربع خطاست.

همان‌گونه که می‌دانیم، در قانون انتقال سیستم پاداش-جریمه، تعداد خسارت‌های ادعا شده در سال قبل نقش مهمی ایفا می‌کند؛ بنابراین در این سیستم از متغیر رفتار ادعاهای خسارت گذشته برای تصحیح حق‌بیمه آینده استفاده می‌شود. ایراد سیستم پاداش - جریمه این است که حق‌بیمه‌های پرداخت‌شده توسط بیمه‌گذاران بسیار متغیر است. با توجه به اینکه سیستم پاداش-جریمه مبتنی بر تعداد خسارت‌هاست نمی‌تواند یک سیستم عادلانه باشد. بنابراین توصیه می‌شود از سیستمی استفاده شود که هر دو عامل تعداد و شدت خسارت‌ها را در محاسبات دخیل کند. همان‌گونه که می‌دانیم شدت خسارت‌های واقع شده متغیر است ولی اثر این شدت در محاسبات مربوط به سیستم پاداش-جریمه لحاظ نشده است. بنابراین بیمه‌گذاری که سه خسارت جزئی دارد باید حق‌بیمه بیشتری نسبت به بیمه‌گذاری که یک خسارت بزرگ مرتکب شده است بپردازد، درحالی‌که ممکن است مبلغ یک خسارت بزرگ ده برابر سه خسارت جزئی باشد و این امر منصفانه نیست.

منابع و ماخذ

- Bermudez, L.; Denuit, M.; Dhaene, J., (2001). Exponential bonus-malus systems integrating a priori risk classification. *Journal of Actuarial Practice*, 9(53), 84-112.
- Boucher, J.P.; Denuit M., (2008). Credibility premiums for the zero-inflated Poisson model and new hunger for bonus interpretation. *Insurance: Mathematics and Economics*, 42(2), 727-735.
- Denuit, M.; Dhaene, J., (2001). Bonus-Malus scales using exponential loss functions. *Blätter der DGVFM*, 25(1), 13-27.
- Lange, J.T., (1969). Application of a mathematical concept of risk to property-liability insurance ratemaking. *Journal of Risk and Insurance*, 36(4): 383-391.
- Morillo, I.; Bermúdez, L., (2003). Bonus-malus system using an exponential loss function with an Inverse Gaussian distribution. *Insurance: Mathematics and Economics*, 33(1), 49-57.
- Payandeh Najafabadi, A.T., (2010). A new approach to the credibility formula. *Insurance: Mathematics and Economics*, 46(2), 334-338.
- Payandeh Najafabadi, A.T.; Atatalab, F.; Omid Najafabadi, M., (2017). Credibility premium for rate-making systems. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 46(1), 415-426.
- Payandeh Najafabadi, A.T.; MohammadPour, S., (2017). A k-Inflated Negative binomial mixture regression model: Application to rate-making systems. *Asia-Pacific Journal of Risk and Insurance*, 12(2), 1-31.
- Razie, F.; Bahrami Samani, E.; Ganjali, M., (2016). A latent variable model for analyzing mixed longitudinal (k,l)-inflated count and ordinal responses. *Journal of Applied Statistics*, 43(12), 2203-2224.