Iran J. Insur. Res., 4(1): 76-93, Winter 2014, Serial #11

Iranian Journal of Insurance Research
(IJIR)
Homepage: https://ijir.irc.ac.ir/?lang=en

Insurance Research Center (IRC)

ORIGINAL RESEARCH PAPER

Two new methods for determining relativity premium in Iranian bonus-malus system

M. Teimourian[1,*], A.T. Payandeh Najafabadi [2], M.G. Vahidi Asl [2]

[1] *Department of Agricultural Science, Faculty of Agriculture and Basic Sciences, Islamic Azad University (Roudehen Branch), Tehran, Iran*

[2] *Department of Actuarial, Faculty of Mathematical Sciences, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran*

ARTICLE INFO

Article History
Received: 19 August 2014
Revised: 31 December 2014
Accepted: 11 May 2015

Keywords
Maximum entropy theory; Bonus-malus system; Relative premiu; Constrained parameter space.

ABSTRACT

Computing relative premiums in Bonus-Malus systems based on Bayesian methods is used and confirmed by most of actuaries, but due to the complexity of computations, the obtained results based on the Bayesian methods are not utilizing and suitable for use in practice. Two new methods for evaluation of relative premium in the Bonus-Malus system have been proposed in the current article. The first method is based on using Maximum Entropy Theory (Maximum Uncertainty) and the second method is based on Bayesian inference for constrained parameters space under the existence of Serial relation conditions. The proposed methods are compared with Bayesian method utilizing the standards measures and optimum results obtained. Finally, the relative premium calculated utilizing the proposed methods are compared with the applied amounts in the Iranian Bonus-Malus system and the results indicated that the current system must improve.

***Corresponding Author:**
Email: *Teimourian.m@riau.ac.ir*
DOI: ١٠,٢٢٠٥٦/ijir.٢٠١٤.٠١,٠٥

نشریه علمی پژوهشنامه بیمه

سایت نشریه: https://ijir.irc.ac.ir/?lang=fa

مقاله علمی

معرفی دو روش جدید برای تعیین حق بیمه نسبی در سیستم پاداش - جریمه ایران

مریم تیموریان [۱,*]، امیر تیمور پاینده نجف آبادی [۲]، محمد قاسم وحیدی اصل [۲]

[۱] گروه علوم کشاورزی، دانشکده علوم پایه و کشاورزی، دانشگاه آزاد اسلامی(واحد رودهن)، تهران، ایران

[۲] گروه بیم‌سنجی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران

اطلاعات مقاله

تاریخ دریافت: ۲۸ مرداد ۱۳۹۳

تاریخ داوری: ۱۰ دی ۱۳۹۳

تاریخ پذیرش: ۲۱ اردیبهشت ۱۳۹۴

چکیده:

محاسبه حق بیمه نسبی در سیستم‌های پاداش - جریمه به روش‌های بیزی مورد استفاده و تأیید اغلب اکچوئری‌ها است اما نتایج به دست آمده با استفاده از روش‌های بیزی به دلایلی مثل پیچیدگی محاسبات، کاربردی نبوده و در عمل قابل استفاده نیست. در این مقاله دو روش جدید برای تعیین حق بیمه نسبی در سیستم پاداش - جریمه پیشنهاد می‌شود. روش اول بر اساس استفاده از اصل ماکسیمم آنتروپی (حداکثر عدم قطعیت) و روش دوم بر اساس استنباط بیزی در فضای پارامتری مقید تحت شرط وجود یک رابطه ترتیبی است. روش‌های پیشنهادی با استفاده از معیارهای استاندارد با روش بیزی مقایسه شده و بهین بودن آنها در عمل نتیجه می‌شود. سرانجام حق بیمه‌های نسبی محاسبه شده با استفاده از روش‌های پیشنهادی با مقادیر مورد استفاده در سیستم پاداش - جریمه کشور مقایسه می‌شوند و نتایج، نیاز به تغییر سیستم فعلی را نشان می‌دهد.

کلمات کلیدی

اصل ماکسیمم آنتروپی

حق بیمه نسبی

سیستم پاداش - جریمه

فضای پارامتری مفید

***نویسنده مسئول:**

ایمیل: Teimourian.m@riau.ac.ir

DOI: ۱۰,۲۲۰۵٦/ijir.۲۰۱٤.۰۱,۰۵

مقدمه

منظور از سیستم‌های پاداش - جریمه در بیمه اتومبیل، روشی است که در آن حق بیمه برای بیمه گذار بر اساس تعداد، نوع و میزان خسارت‌های ادعا شده در طول دوره قبل محاسبه می‌شود. به عبارت ساده‌تر اگر بیمه گذار در طول دوره قبل ادعای خسارت نداشته باشد، حق بیمه او در دوره بعد شامل تخفیف یا اصطلاحاً پاداش می‌شود و اگر حداقل یک بار ادعای خسارت کرده باشد، حق بیمه او در دوره بعد شامل نوعی جریمه خواهد شد. به همین دلیل چنین سیستم‌هایی را سیستم‌های پاداش - جریمه می‌نامند. سیستم پاداش - جریمه مورد استفاده در بیمه شخص ثالث کشور در تمام شرکت‌های بیمه یکسان است. این سیستم برای خسارت‌های مالی و خسارت‌های جانی مقادیر جریمه متفاوتی نسبت می‌دهد. با در نظر گرفتن این مهم، می‌توان این سیستم را با ۱۵ سطح در نظر گرفت که سطوح از ۱ تا ۱۵ شماره گذاری شده‌اند. بیمه گذاران در سطح ۱ حداقل حق بیمه (حق بیمه نسبی برابر با ۰/۳) و در سطح ۱۵ حداکثر حق بیمه (حق بیمه نسبی برابر با ۲) را می‌پردازند بیمه گذاران تازه وارد در سطح اولیه یعنی سطح ۹ قرار می‌گیرند و حق بیمه‌ای برابر با مقدار حق بیمه پایه (حق بیمه نسبی برابر ۱) می‌پردازند . قاعده تغییر وضعیت بیمه گذاران در جدول ۱ آمده است:

جدول ۱: سطح بیمه گذار در سال آینده

سطح قبلی بیمه‌گذار	تعداد خسارت	تعداد خسارت مالی				تعداد خسارت جانی			
	۰	۱	۲	۳	۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۸	۱۰	۱۱	۱۲	۱۴	۱۱	۱۲	۱۳	۱۵
۱۴	۸	۱۰	۱۱	۱۲	۱۴	۱۱	۱۲	۱۳	۱۵
۱۳	۸	۱۰	۱۱	۱۲	۱۴	۱۱	۱۲	۱۳	۱۵
۱۲	۸	۱۰	۱۱	۱۲	۱۴	۱۱	۱۲	۱۳	۱۵
۱۱	۸	۱۰	۱۱	۱۲	۱۴	۱۱	۱۲	۱۳	۱۵
۱۰	۸	۱۰	۱۱	۱۲	۱۴	۱۱	۱۲	۱۳	۱۵
۹	۸	۱۰	۱۱	۱۲	۱۴	۱۱	۱۲	۱۳	۱۵
۸	۷	۱۰	۱۱	۱۲	۱۴	۱۱	۱۲	۱۳	۱۵
۷	۶	۱۰	۱۱	۱۲	۱۴	۱۱	۱۲	۱۳	۱۵
۶	۵	۱۰	۱۱	۱۲	۱۴	۱۱	۱۲	۱۳	۱۵
۵	۴	۱۰	۱۱	۱۲	۱۴	۱۱	۱۲	۱۳	۱۵
۴	۳	۱۰	۱۱	۱۲	۱۴	۱۱	۱۲	۱۳	۱۵
۳	۲	۱۰	۱۱	۱۲	۱۴	۱۱	۱۲	۱۳	۱۵
۲	۱	۱۰	۱۱	۱۲	۱۴	۱۱	۱۲	۱۳	۱۵
۱	۱	۱۰	۱۱	۱۲	۱۴	۱۱	۱۲	۱۳	۱۵

سیستم‌های پاداش - جریمه به دلیل کارایی و پیشگیری از بروز پدیده مخاطرات اخلاقی[۱] در بیمه از اهمیت بسیاری برخوردار است و قابلیت استفاده در تمام شاخه‌های بیمه‌ای را دارد. محاسبه حق بیمه نسبی و در نتیجه حق بیمه قابل پرداخت بیمه گذاران نیز از جمله مسائل مورد توجه در سیستم‌های پاداش - ریمه است. بنابراین ارائه برآوردگرهایی که با اضافه کردن جزئیات مربوط به قراردادهای بیمه در تحلیل،

---

[۱]. مخاطرات اخلاقی بیمه گذاران زمانی رخ می دهد که اطلاعات بیمه گذاران نسبت به سابقه و توانایی رانندگی آنها بیشتر از شرکت بیمه گر باشد (برای اطلاعات بیشتر پینکوییت و همکاران (۲۰۰۱) را ببینید).

دقت زیادی داشته و به سادگی قابل محاسبه باشند، ضروری می‌نماید. بدیهی است هر چه بیشتر بتوانیم اطلاعات موجود در داده‌های پیشین را وارد مدل کنیم، فرضیات روش‌های ارائه شده به واقعیت نزدیک تر بوده و اطمینان به نتایج به دست آمده با این روش‌ها بیشتر خواهد بود. استفاده از اطلاعات مربوط به بیمه گذاران موجب شده است که حق بیمه به روش‌های بیزی محاسبه گردد که در ادامه مقاله به اختصار مرور خواهد شد. اما نتایج به دست آمده با استفاده از روش‌های بیزی به دلیل پیچیدگی محاسباتی آن قابل استفاده نیست. در این مقاله دو روش جدید برای محاسبه حق بیمه نسبی ارائه می‌شود به طوری که به سادگی قابل محاسبه بوده و خصوصیات مطلوب را دارد.

اولین روش پیشنهادی، تعیین حق بیمه با استفاده از اصل ماکسیمم آنتروپی[۱] است از از اصل ماکسیمم آنتروپی برای مواردی استفاده می‌شود که هدف برآورد توزیع احتمال است به طوری که توزیع به دست آمده تحت قیدهای مسئله، بیشترین عدم قطعیت (ماکسیمم آنتروپی) را داشته باشد. اولین بار جینز[۲] توزیع احتمال با حداقل اریبی و تحت قیود خاص را با استفاده از ماکسیمم آنتروپی اندازه شانون $(-\sum P_i \ln(P_i))$ به دست آورد. منابع بسیاری از جمله زوگرافوس[۳] به بررسی ویژگی‌ها، کاربردها و تعمیم‌های روش آنتروپی پرداخته‌اند. همچنین این روش در بسیاری از شاخه‌های مختلف علوم مورد استفاده قرار گرفت که مرور جامعی از آن را می‌توان در کوور و توماس[۴] و پاردو[۵] یافت . استفاده از ماکسیمم آنتروپی در توابع مطلوبیت توسط جسوپ[۶] ، عباس[۷] و دارونه[۸] ارائه شده است . همچنین لاندزمن[۹] و پاینده و همکاران[۱۰] از این روش در نظریه باورمندی استفاده کردند . کرواویچ و مرگل[۱۱] و ساچلاس و پاپانیا[۱۲] و مدل بندی توزیع شدت ادعاها را با استفاده از روش روش ماکسیمم آنتروپی بررسی کردند. گزیل و همکاران[۱۳] احتمال ورشکستگی را با استفاده از این اصل مورد مطالعه قرار دادند. در ادامه این مقاله نیز از اصل ماکسیمم آنتروپی برای تعیین حق بیمه نسبی در سیستم پاداش - جریمه استفاده خواهد شد.

روش دوم پیشنهادی، استفاده از رویکرد فضای پارامتری[۱۴] مقید است. در این روش با استفاده از ماهیت ترتیبی بودن پارامتر مخاطره نسبی برای بیمه گذاران در سطوح مختلف سیستم پاداش - جریمه، چگونگی برآورد حق بیمه‌های نسبی مورد بررسی قرار می‌گیرد. اوایل سال ۱۹۵۰ مسئله برآورد پارامترها در فضای پارامتری مقید را آیر و همکاران[۱۵] مطرح کردند. حالت کلی تر مسئله و شرایط وجود برآوردگر ماکسیمم درستنمایی در فضای پارامتری مقید در تحقیق ون - ادن[۱۶] مطالعه و الگوریتمی برای محاسبه آن ارائه شد. پس از آن بسیاری از نویسندگان برآوردگر ماکسیمم درستنمایی را برای توزیع‌های مختلف مورد بررسی قرار داده و روش محاسبه آن را بیان کردند. از مهم‌ترین مطالعات در

[۱]. Maximum Entropy
[۲]. Jaynes, ۱۹۵۷
[۳]. Zografos, ۲۰۰۸
[۴]. Cover and Thomas, ۲۰۰۶
[۵]. Pardo, ۲۰۰۶
[۶]. Jessop, ۱۹۹۹
[۷]. Abbas, ۲۰۰۲ and ۲۰۰۶
[۸]. Darooneh, ۲۰۰۶ and ۲۰۰۴
[۹]. Landsman, ۱۹۹۹
[۱۰]. Payandeh etal., ۲۰۱۲
[۱۱]. Krvavych and Mergel, ۲۰۰۰
[۱۲]. Sachlas and Papaioannou, ۲۰۱۲
[۱۳]. Gzyl et al., ۲۰۱۳
[۱۴]. Constrained Parameter Space
[۱۵]. Ayer et al., ۱۹۵۵
[۱۶]. Van - Eden, ۱۹۵۶; ۱۹۵۷ a,b,c; ۱۹۵۸

رابطه با بررسی برآوردگر در فضای پارامتری مقید با استفاده از توابع زیان دیگری غیر از تابع زیان توان دوم خطا، می‌توان به کوباکاوا[۱]، مارچاند مارچاند و استراودمن[۲] و مارچاند و پاینده[۳] اشاره کرد.

کرد. گلفند و همکاران[۴] روش نمونه گیری گیبز[۵] را برای برآورد پارامترها پیشنهاد دادند. این روش به سادگی قابل استفاده بوده و نسبت به توزیع‌های پیشین پارامتر مخاطره نسبی انعطاف پذیر است. روش مورد استفاده در این مقاله برای محاسبه حق بیمه نسبی در فضای پارامتری مقید نیز روش نمونه گیری گیبز است.

در ادامه به مقایسه حق بیمه‌های نسبی به دست آمده با استفاده از دو روش ماکسیمم آنتروپی و فضای پارامتری مقید با حق بیمه‌های نسبی مورد استفاده در شرکت‌های بیمه و تحت شرایط مختلف می‌پردازیم.

برآوردگر بیزی[۶] حق بیمه نسبی

در عمل یک سیستم پاداش - جریمه شامل s سطح است که با اعداد ۱، ۲ ، ...،s شماره گذاری می‌شوند. در ابتدا بیمه گذار با توجه به مشخصات خود در یکی از سطوح قرار می‌گیرد و در سال‌های بعد با توجه به تعداد خسارت‌های گزارش شده او در طول دوره قبل، به سطح بالاتر یا پایین تر انتقال می‌یابد . بیمه گذاری که در پایین ترین سطح (l=۱) قرار گیرد، کمترین حق بیمه و بیمه گذاری که در بالاترین سطح (l =s) قرار گرفته باشد، بیشترین حق بیمه را می‌پردازد. هر یک از سط وح سیستم پاداش - جریمه دارای حق بیمه نسبی است. اگر حق بیمه نسبی بیمه گذار در سطح l را با r_l نشان دهیم، حق بیمه هر سطح از ضرب حق بیمه نسبی در حق بیمه پایه (Π) محاسبه می‌شود. مقدار حق بیمه پایه بر اساس عوامل مخاطره ظاهری مانند نوع اتومبیل، سن راننده، سن اتومبیل و ...) تعیین می‌شود.

در اغلب سیستم‌های پاداش - جریمه، اطلاع از سطح بیمه گذار و تعداد خسارت‌ها در طول دوره قبل برای تعیین سطح و مقدار حق بیمه او در آینده کافی است بنابراین اگر تعداد خسارت‌های بیمه گذار در دوره‌های مختلف مستقل از هم باشند، آنگاه سطح بیمه گذار در سیستم پاداش - جریمه، تشکیل یک زنجیر مارکوف را خواهد داد. با استفاده از خواص زنجیر مارکوف و ماتریس قاعده تغییر وضعیت سیستم، می‌توان احتمال تغییر وضعیت بیمه گذار از یک سطح به سطح دیگر در (T+۱)– امین دوره پوشش بیمه‌ای را تعیین کرد.

اگرچه بیمه گذارانی که نسبت به سابقه و عوامل مخاطره ظاهری همانند هستند، همگی در یک سطح خاصی از سیستم قرار گرفته‌اند اما به دلیل وجود عوامل مخاطره غیر قابل مشاهده (مانند خلق و خو، سرعت عکس العمل، مهارت رانندگی و ...) گرایش به تصادف یکسانی ندارند. بنابراین برای تعیین حق بیمه عادلانه باید این عوامل غیر قابل مشاهده نیز در نظر گرفته شوند. گرایش به تصادف را با پارامتر θ نشان داده و پارامتر مخاطره نسبی می‌نامند. محاسبه حق بیمه نسبی و در نتیجه حق بیمه قابل پرداخت بیمه گذاران نیز از جمله مسائل مورد توجه در سیستم‌های پاداش - جریمه است. برآورد پارامتر مخاطره نسبی را حق بیمه نسبی در نظر می‌گیرند. با در نظر گرفتن یک توزیع پیشین مناسب برای پارامتر مخاطره نسبی و استفاده از استنباط بیزی، می‌توان حق بیمه نسبی را تعیین نمود. نوربرگ[۷] برای اولین بار از استنباط بیزی برای محاسبه حق بیمه نسبی استفاده نمود. در این روش مقدار حق بیمه نسبی بیمه گذار در سطح l تحت تابع زیان توان دوم خطا از رابطه زیر به دست می‌آید؟

---

۱. Kubokawa, ۱۹۹۴; ۲۰۰۵ a,b.

۲. Marchand Strawderman, ۲۰۰۴

۳. Marchand and Payandeh, ۲۰۱۱

۴. Gelfand et al., ۱۹۹۲

۵. Gibbs Sampling

۶. Bayesian Estimator

۷. Norberg, ۱۹۷۶

$$r_l = E(\Theta|L = l)\frac{\int_{\cdot}^{+\infty} \theta\pi_l(\lambda\theta)d\pi_\Theta(\theta)}{\int_{\cdot}^{+\infty} \pi_l(\lambda\theta)d\pi_\Theta(\theta)}, ۱ = ۱,۲, \dots, s \qquad (۱)$$

λ : متوسط فراوانی خسارت بیمه گذاران؛

$\pi(\vartheta) = (\pi_۱(\vartheta), \dots, \pi_s(\vartheta))$: توزیع احتمال مانای سیستم با متوسط فراوانی ϑ ؛

π_Θ : توزیع پیشین پارامتر مخاطره نسبی.

مقدار حق بیمه نسبی در این روش به تابع توزیع پارامتر مخاطره نسبی وابسته است. توزیع معمول مورد استفاده برای پارامتر مخاطره نسبی، توزیع گاما است. همچنین می‌توان از توزیع‌های نامنفی لگ نرمال یا گاوسی وارون نیز برای مدل بندی استفاده نمود (Tremblay, ۱۹۹۹ ; Walhin and Paris ۱۹۹۲).

علاوه بر عدم امکان تجاری بودن استفاده از روش‌های بیزی به دلیل پیچیدگی که در عمل قابل استفاده نیست، اگر از توابع زیانی غیر از تابع زیان توان دوم خطا استفاده شود، برآوردگر r_l در رابطه (۱) شکل بسته‌ای نخواهد داشت. با توجه به تعریف سیستم پاداش - جریمه، باید برآوردگرهای r_l نسبت به l توابع صعودی باشند که در بسیاری از مواقع برآوردگرهای بیزی چنین ویژگی را ندارند و در نتیجه سیستم عادلانه نیستند (Denuit et al., ۲۰۰۷).

تعیین حق بیمه نسبی با استفاده از روش ماکسیمم آنتروپی

مسئله‌ای را در نظر بگیرید که در آن امکان رخداد پیشامدهای متفاوتی با احتمال‌های متفاوت و تحت شرایط خاص وجود داشته باشد . با اینکه تمامی رخدادها معلوم است اما نمی‌توان پیشامدی را که در نهایت و تحت شرایط موجود، رخ خواهد داد، مشخص کرد. برای حل چنین مسئله‌ای باید تمامی امکانات و شرایط موجود را در نظر گرفت. یکی از روش‌های حل چنین مسائلی استفاده از روش ماکسیمم آنتروپی است که در این بخش به آن اشاره می‌شود. در ابتدا تعریف آنتروپی بیان می‌شود.

تعریف ۱: فرض کنید p یک توزیع احتمال گسسته بر مجموعه متناهی $\{x_۱ , x_۲ , \dots , x_n\}$ به طوری که $P_i = p(x_i)$ برابر است با :

$$H(p) = -\sum_{i=۱}^{n} P_i \ln(P_i)$$

در واقع هر چه آنتروپی ($H(p)$) بیشتر باشد، اطلاعات کمتر (عدم قطعیت بیشتر) خواهد بود. برای برآورد توزیع احتمال با ماکسیمم آنتروپی و تحت شرایط خاص از لم زیر استفاده می‌شود.

لم ۱: فرض کنید متغیر تصادفی گسسته X با مقادیر $x_۱$ ، $x_۲$ ، ... ، x_n و احتمال‌های $p_۱$ ، $p_۲$ ، ... ، p_n باشد. هم چنین فرض کنید تابع احتمال این متغیر تصادفی در شرایط $g_۱$ ، $g_۲$ ، ... ، g_m صدق می‌کند به طوری که :

$$\sum_{i=۱}^{n} P_i\, g_r(x_i) = a_r$$

$r = ۱ , ۲ , \dots , m$

در این صورت ضریب لاگرانژ تحت شرایط $g_۱$ ، $g_۲$ ، ... ، g_m به ازای $\lambda_۱$ ، $\lambda_۲$ ، ... ، λ_m های خاص برابر است با :

$$\ell = -\sum_{i=۱}^{n} P_i \ln(P_i) - \sum_{i=۱}^{n} \lambda_r[\sum_{i=۱}^{n} P_i\, g_r(x_i) - a_r]$$

اصل ماکسیمم آنتروپی از محاسبه ضرایب لاگرانژ $\lambda_۱$ ، $\lambda_۲$ ، ... ، λ_m و توزیع احتمال متغیر تصادفی X به طوری که ℓ ماکسیمم شود، به دست می‌آید. در واقع این روش با معرفی چند متغیر جدید متناسب با تعداد قیدهای مسئله، تعیین توزیع احتمال را ساده تر می‌نماید، به طوری که احتمال‌ها به صورت توابعی از ضرایب لاگرانژ تبدیل شده و از حل یک دستگاه معادلات ساده به دست می‌آیند. آنتروپی به طور

پیوسته مشتق پذیر و مقعر بوده و همچنین قیدهای مسئله خطی و به طور پیوسته مشتق پذیر هستند؛ لذا بنا به قضیه کوهن - توکر[۱] توزیع احتمال حاصل، یکتاست[۲].

در ادامه با استفاده از اصل ماکسیمم آنتروپی، روشی برای محاسبه حق بیمه نسبی در سیستم پاداش - جریمه ارائه می‌شود . فرض کنید $M_l(t)$ متغیر تصادفی تعداد بیمه گذاران در سطح l - ام،

$$U(t) = \prod \sum_{l=۱}^{s} r_l M_l(t)$$

مجموع درآمد حاصل از حق بیمه ها تا زمان t هستند. یکی از پرکاربردترین روش ها برای محاسبه حق بیمه نسبی، روش بیزی است که در بخش مقدمه به آن اشاره شد. حق بیمه نسبی محاسبه شده با استفاده از روش بیزی و رابطه (۱) را با نماد r_l^{Bays} و مجموع درآمد حاصل از حق بیمه ها را با نماد $U^{Bays}(t)$ نمایش می‌دهیم. از لحاظ نظری استفاده از روش بیزی در محاسبه حق بیمه نسبی مورد قبول است . اما این روش به دلیل مشکلات بیان شده قابل استفاده نیست .گیلد و ساندت[۳] برآورد گر خطی بسیار ساده ای به صورت زیر معرفی کردند:

$$r_l^{Lin} = \alpha + \beta l; \qquad l = ۱, \dots, s$$

که در آن مقادیر α و β از مینیمم کردن امید تابع زیان توان دوم خطا، $E((r^{Lin} - \Theta)^۲)$، به دست می‌آیند. فرض کنید $U^{lin}(t)$ مجموع درآمد حاصل از حق بیمه هایی است که با استفاده از روش برآوردگر خطی به دست می‌آیند. می‌توان مقادیر α و β را به گونه ای محاسبه نمود که $U^{lin}(t)$ تا حد ممکن به مقدار $U^{Bay}(t)$ نزدیک بوده و هم چنین دارای حداکثر عدم قطعیت باشد. چنین برآوردگری را برآورد گر ماکسیمم آنتروپی نامیده و برای محاسبه آن از قضیه ۱ استفاده می‌کنیم.

قضیه ۱: سیستم پاداش - جریمه با S سطح را در نظر بگیرید. فرض کنید r_l^{Bay} و r_l^{lin} به ترتیب برآوردگر بیزی و برآوردگر خطی حق بیمه نسبی باشند. اگر

$$E\left(U^{Bays}(t)M^*(t)\right)E\left(M(t)M^*(t)\right) < E\left(U^{Bays}(t)M(t)\right)E(M^*(t)^۲)$$

آن گاه برآوردگر ماکسیمم آنتروپی برای حق بیمه نسبی برابر است با

$$r_l^{Lin} = \alpha_{opt} + \beta_{opt} l$$

به طوری که :

$$\alpha_{opt} = \frac{E\left(U^{Bays}(t)M(t)\right)}{E\left(M^۲(t)\right)}(۱-\omega)$$

$$\beta_{opt} = \frac{E\left(U^{Bays}(t)M(t)\right)}{E(M^*(t)^۲)}\omega$$

$$\omega = \frac{E\left(U^{Bays}(t)M(t)\right)E\left(M(t)M^*(t)\right)^۲ - E\left(M^۲(t)\right)E\left(U^{Bays}(t)M^*(t)\right)E\left(M(t)M^*(t)\right)}{E\left(U^{Bays}(t)M(t)\right)E\left(M(t)M^*(t)\right)^۲ - E\left(U^{Bays}(t)M(t)\right)E(M^*(t)^۲)}$$

و

$$M^*(t) = \sum_{l=۱}^{s} l M_l(t) \;, M(t) = \sum_{l=۱}^{s} M_l(t)$$

این برآوردگر دارای ماکسیمم آنتروپی شانون و حداقل میانگین توان دوم تفاضل مجموع درآمد حق بیمه‌ها با روش بیزی است.

---

[۱]. Kuhn–Tucker Conditions

[۲]. برای اثبات ر.ک. به: Jaynes, ۱۹۵۷; Conrad, ۲۰۱۳

[۳]. Gilde and Sundt, ۱۹۸۹

برهان :اثبات این قضیه در دو مرحله زیر ارائه می شود.

ابتدا از $E\left(U^{Bays}(t)-U^{Lin}(t)\right)^{۲}$ نسبت به α و β مشتق گرفته شده و دو تابع زیر به دست می‌آید:

$$f_{۱}(\alpha,\beta)=\frac{\alpha E\left(M^{۲}(t)\right)+\beta E(M(t)M^{*}(t))}{E(U^{Bays}(t)M(t))}-۱$$

$$f_{۲}(\alpha,\beta)=\alpha E\left(M(t)M^{*}(t)\right)+\beta E(M^{*۲}(t))-E\left(U^{Bays}(t)M^{*}(t)\right)$$

سپس از اصل ماکسیمم آنتروپی شانون با شرایط $f_{۱}(\alpha,\beta)=۰$ و $f_{۲}(\alpha,\beta)=۰$ استفاده می‌کنیم. داریم:

$$\ell=-\frac{\alpha E\left(M^{۲}(t)\right)}{E\left(U^{Bays}(t)M(t)\right)}\ln\left(\frac{\alpha E\left(M^{۲}(t)\right)}{E\left(U^{Bays}(t)M(t)\right)}\right)$$
$$-\frac{\beta E\left(M(t)M^{*}(t)\right)}{E\left(U^{Bays}(t)M(t)\right)}\ln\left(\frac{\beta E\left(M(t)M^{*}(t)\right)}{E\left(U^{Bays}(t)M(t)\right)}\right)$$
$$-\lambda_{۱}f_{۱}(\alpha,\beta)-\lambda_{۲}f_{۲}(\alpha,\beta)$$

با مشتق گیری از تابع ℓ نسبت α,β ، $\lambda_{۱}$ و $\lambda_{۲}$ روابط زیر حاصل می شوند:

$$\alpha=\frac{E\left(U^{Bays}(t)M(t)\right)}{E(M^{۲}(t))}\exp\{۱-\lambda_{۱}E\left(U^{Bays}(t)M(t)\right)$$
$$-\lambda_{۲}\frac{E\left(U^{Bays}(t)M(t)\right)E(M^{۲}(t))EM(t)M^{*}(t)}{E(M^{۲}(t))}$$

$$\beta=\frac{E\left(U^{Bays}(t)M(t)\right)}{E\left(M(t)M^{*}(t)\right)}\exp\{۱-\lambda_{۱}E(U^{Bays}(t)M(t))$$
$$-\lambda_{۲}\frac{E\left(U^{Bays}(t)M(t)\right)E(M^{*۲}(t))}{EM(t)M^{*}(t)}$$

$$\alpha E\left(M^{۲}(t)\right)+\beta E\left(M(t)M^{*}(t)\right)-E\left(U^{Bays}(t)M(t)\right)=۰$$

$$\beta E\left(M^{*۲}(t)\right)+\alpha E\left(M(t)M^{*}(t)\right)-E\left(U^{Bays}(t)M^{*}(t)\right)=۰$$

مقادیر α و β مطلوب مسئله از ساده کردن روابط بالا حاصل می‌شود. تنها شرط لازم برای جواب داشتن مسئله شرط $۰<\omega<۱$ است. این شرط معادل است با:

$$E\left(U^{Bays}(t)M^{*}(t)\right)E\left(M(t)M^{*}(t)\right)<E\left(U^{Bays}(t)M(t)\right)E\left(M^{*۲}(t)\right)$$

در ادامه مقادیر حق بیمه نسبی را برای سیستم پاداش - جریمه مورد استفاده ایران با استفاده از روش بیزی و روش ماکسیمم آنتروپی محاسبه و با استفاده از معیارهای مناسب مورد مقایسه قرار می دهیم.

برای محاسبه مقادیر حق بیمه نسبی در سیستم پاداش - جریمه ایران با استفاده از هر دو روش بیزی و ماکسیمم آنتروپی، فرایند تعداد بیمه گذاران حاضر در سیستم در زمان t و سطح l ام، $M_l(t)$ ، فرآیند پواسون با پارامتر $\mu=۰/۹$ در نظر گرفته می‌شود. هم چنین پارامتر مخاطره نسبی، Θ ، دارای توزیع پیشین گاما $\Gamma(۱,۱)$ است. بنا به گزارشات مربوط به تحلیل سیستم پاداش - جریمه ایران (پاینده، ۱۳۹۳)، متوسط فراوانی خسارت‌ها برابر ۰/۰۷۵۲ ، متوسط فراوانی خسارت‌های مالی بیمه گذاران برابر $\lambda_{۱}$ = ۰/۰۶۸۳۵۶۸ و متوسط فراوانی خسارت‌های جانی بیمه گذاران برابر $\lambda_{۲}$ = ۰/۰۰۶۷۷ است.

مقادیر حق بیمه نسبی برای سیستم پاداش - جریمه ایران با استفاده از دو روش بیزی (رابطه (۱)) و روش ماکسیمم آنتروپی (قضیه ۱) محاسبه و در جدول ۲ آمده است.

با توجه به اینکه سطح ۹، سطح اولیه سیستم بوده و بیمه گذاران فقط در ابتدای ورود به سیستم در این سطح قرار می‌گیرند، احتمال حضور در این سطح برای سال‌های بعد برابر صفر است. مقدار حق بیمه بیزی برای این سطح برابر ۱ در نظر گرفته شده است.

جدول ۲: مقادیر حق بیمه نسبی محاسبه شده با دو روش بیزی و ماکسیمم آنتروپی در سیستم پاداش - جریمه ایران

سطح	روش بیزی	روش ماکسیمم آنتروپی
۱	۰/۶۲۰۶	۰/۴۶۶۰
۲	۱/۲۷۳۲	۰/۷۲۴۰
۳	۱/۳۳۸۴	۰/۹۸۲۰
۴	۱/۴۱۰۸	۱/۲۴
۵	۱/۴۹۱۶	۱/۴۹۸۱
۶	۱/۵۸۲۶	۱/۷۵۶۱
۷	۱/۶۸۵۹	۲/۰۱۴۱
۸	۱/۸۰۴۲	۲/۲۷۲۱
۹	۱	۲/۵۳۰۱
۱۰	۱/۸۷۲۰	۲/۷۸۸۱
۱۱	۲/۲۸۶۰	۳/۰۴۶۱
۱۲	۱	۳/۳۰۴۱
۱۳	۳/۹۷۳۱	۳/۵۶۲۱
۱۴	۴/۶۸۰۱	۳/۸۲۰۱
۱۵	۴/۹۶۹۱	۴/۰۷۸۱

برای مقایسه روش‌های تعیین حق بیمه نسبی با استفاده از روش بیزی و روش ماکسیمم آنتروپی در سیستم پاداش - جریمه ایران از دو معیار استفاده خواهیم کرد. اولین معیار، معیار کارایی است که مقیاسی برای اندازه گیری عادلانه بودن حق بیمه‌های دریافتی است، زیرا انتظار داریم با افزایش نسبی فراوانی خسارت‌های بیمه گذار، مقدار حق بیمه او نیز به همان نسبت افزایش یابد و برعکس. نرخ افزایش به مفهوم کارایی وابسته است که توسط لومیرانتا [1] معرفی و به نام کارایی لومیرانتا معروف شد. این معیار به صورت زیر محاسبه می‌شود.

فرض کنید λ متوسط فراوانی خسارت‌های بیمه گذار در یک سیستم پاداش - جریمه و

$$\bar{R}(\lambda) = \sum_{l=1}^{s} r_l \pi_l(\lambda)$$

متوسط حق بیمه پرداختی بیمه گذار باشد . در این صورت کارایی لومیرانتا، Ξ ، برابر است با:

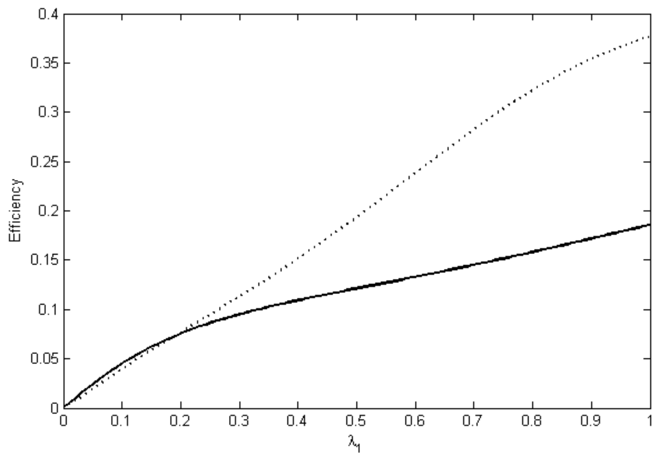
$$\Xi(\lambda) = \frac{d\ln(\bar{R}(\lambda))}{d\ln(\lambda)} = \frac{\lambda d\bar{R}(\lambda)}{\bar{R}(\lambda)}$$

معیار دومی که برای مقایسه روش ماکسیمم آنتروپی و روش بیزی حق بیمه نسبی استفاده می‌شود، ضریب تغییرات، CV، است. ضریب تغییرات از تقسیم انحراف استاندارد حق بیمه‌ها بر میانگین حسابی حق بیمه‌ها به دست می‌آید. ضریب تغییرات، معیاری برای اندازه گیری میزان سختگیری سیستم پاداش - جریمه است بدین معنی که هر چه مقدار این معیار بیشتر شود آنگاه نتیجه می‌شود که سیستم پاداش - جریمه نسبت به بیمه گذاران پرخطر رفتار سخت گیرانه تری دارد.

[1]. Loimaranta, ۱۹۷۲

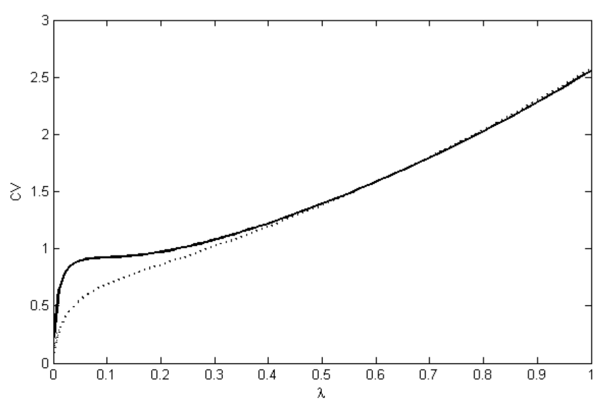
برای مقایسه روش‌های تعیین حق بیمه نسبی، مقادیر دو معیار کارایی لومیرانتا و ضریب تغییرات به ازای مقادیر مختلف فراوانی تعداد خسارت‌ها، $\lambda \epsilon [0,1]$ محاسبه شده و روشی که مقادیر این دو معیار برای آن بیشتر باشد به عنوان روش بهتر معرفی می‌شود. برای مقایسه مقادیر این دو معیار برای هر دو روش به ازای $\lambda \epsilon [0,1]$ محاسبه و به ترتیب در نمودار ۱ و ۲ رسم شده‌اند.

نمودار ۱: کارایی برآوردگر ماکسیمم آنتروپی (خطوط ممتد) و برآوردگر بیزی (نقطه چین) در سیستم پاداش جریمه ایران



طبق نمودار ۱ اگر متوسط تعداد خسارت‌ها کمتر از ۲/۰ باشد، کارایی روش ماکسیمم آنتروپی بیشتر از کارایی روش بیزی خواهد بود. در عمل نیز متوسط تعداد خسارت‌ها عددی در بازه ۰/۰۷ و ۰/۱۲ (میانگین ۰/۱۰) است و بیمه کردن پیشامدی با متوسط فراوانی وقوع بیش از ۰/۲۰ منطقی نیست (Park et al., ۲۰۱۰). لذا محاسبه حق بیمه نسبی با روش ماکسیمم آنتروپی علاوه بر اینکه به سادگی قابل محاسبه است، در عمل نیز کارایی بیشتری نسبت به حق بیمه بیزی دارد.

نمودار۲: ضریب تغییرات برآوردگر ماکسیمم آنتروپی (خطوط ممتد) و برآوردگر بیزی نقطه چین) در سیستم پاداش جریمه ایران



نمودار ۲ نیز بیانگر شدت سخت گیری سیستم‌های پاداش - جریمه ایران در صورت استفاده از روش ماکسیمم آنتروپی و روش بیزی است. با توجه به نمودار ۲ می‌توان نتیجه گرفت که به ازای متوسط فراوانی کمتر از ۰/۸، ضریب تغییرات حق بیمه‌های نسبی با روش ماکسیمم

آنتروپی از ضریب تغییرات حق بیمه‌های نسبی با روش بیزی بیشتر بوده و لذا بازدارندگی بیشتری را برای گرایش به تصادف در بین بیمه گذاران تضمین می‌کند.

تعیین حق بیمه نسبی با استفاده از فضای پارامتری مقید

می‌توان برای هر یک از سطوح سیستم، یک پارامتر گرایش به تصادف (پارامتر مخاطره نسبی) در نظر گرفت. پارامتر مخاطره نسبی بیمه گذار سطح lام را با θ_l نشان می‌دهیم. بدیهی است رابطه زیر برای پارامترهای مخاطره نسبی این سیستم برقرار است:

$$\theta_۱ < \theta_۲ < \cdots < \theta_s$$

فرض کنید متغیر تصادفی N_l تعداد خسارت های بیمه گذار سطح l - ام در طول دوره پوشش بیمه ای باشد .متغیرهای تصادفی $N_s , \ldots ,$ $N_۲ , N_۱$ به شرط پارامترهای مخاطره نسبی $\theta_s, \ldots, \theta_۲, \theta_۱$ ، مستقل هستند اما پارامترهای مخاطره نسبی وابسته به هم هستند. به طور معمول مقدار حق بیمه نسبی هر سطح از برآورد پارامتر مخاطره نسبی آن سطح به دست می‌آید. در هر سیستم پاداش - جریمه مقادیر مشخصی برای حداکثر پاداش و حداکثر جریمه بیمه گذاران در سیستم وجود دارد . اگر حداکثر پاداش را با نماد a و حداکثر جریمه را با نماد b نشان دهیم، هدف برآورد پارامترهای مخاطره نسبی است به طوری که:

$$a < \hat{\theta}_۱ < \hat{\theta}_۲ < \cdots < \hat{\theta}_s < b \qquad (۲)$$

فرض کنید $N = (N_۱ , \ldots , N_s)$ بردار تعداد خسارت‌ها، $f_N(n|\lambda, \Theta)$ توزیع شرطی بردار N به شرط بردار پارامتر مخاطره نسبی و $\pi(\Theta|\mu)$ توزیع پیشین بردار پارامتر مخاطره نسبی باشد. امید پسین بردار پارامتر مخاطره پسین به شرط اطلاع از تعداد خسارت‌های سال قبل، برآوردگر معمول حق بیمه نسبی خواهد بود. روش مورد استفاده برای محاسبه حق بیمه نسبی، روش نمونه گیری گیبز از توزیع پسین بردار Θ است که گلفند و همکاران[۱] آن را برای تولید نمونه از توزیع پسینΘ معرفی کرده‌اند. طبق این روش:

$$\pi\left(\theta_l \middle| N, \lambda, \mu, \Theta_j, j \neq l\right) \propto f_N(n|\lambda, \Theta)\pi(\Theta|\mu), \qquad (۳)$$

که در آن:

$$\Theta_j = \{\theta_k, k \neq j\}$$

این روش موجب سهولت در نمونه گیری و برآورد پارامترها می‌شود. توزیع پیشین مورد استفاده برای بردار پارامترهای مخاطره نسبی، $\Theta = \{\theta_۱, \theta_۲, \ldots, \theta_s)$ توزیع چند متغیره گامای مقید است. این توزیع پرکاربردترین توزیع پیشین مورد استفاده برای پارامتر مخاطره نسبی در سیستم‌های پاداش- جریمه است . البته پارامترهای توزیع پیشین باید به نحوی انتخاب شود که شرط تعادل، متوسط پارامتر مخاطره نسبی برابر با یک، برقرار باشد. در ادامه الگوریتم گیبز برای تولید نمونه از توزیع پسین (۳) بیان می‌شود.

الگوریتم گیبز برای نمونه گیری تحت شرط (۲)

نمونه تصادفی به اندازه m از توزیع (۳) و تحت شرط (۲) با استفاده از نمونه گیری گیبز و به صورت زیر تولید می‌شود:

ابتدا i = ۰ و مقدار اولیه $\Theta^{(۰)} = (\theta_۱^{(۰)}, \theta_۲^{(۰)}, \ldots, \theta_s^{(۰)})$ را برای بردار پارامتر مخاطره نسبی در نظر می‌گیریم؛

به ازای هر i < m مراحل زیر را تکرار می‌کنیم.

i = i + ۱ ؛

نمونه تصادفی از توزیع شرطی (۳) به صورت زیر تولید می‌کنیم:

$$\theta_۱^{(i)} \sim \pi(\theta|N_۱, a, \theta_۲^{(i-۱)}, \ldots, \theta_s^{(i-۱)}) I_{(a, \theta_۲^{(i-۱)})}(\theta)$$

---

[۱]. Gelfand et al., ۱۹۹۲

$$\theta_{۲}^{(i)} \sim \pi(\theta|N_{۲}, \theta_{۱}^{(i)}, \theta_{۳}^{(i-۱)}, \dots, \theta_{s}^{(i-۱)}) I_{(\theta_{۱}^{(i)}, \theta_{۳}^{(i-۱)})}(\theta)$$

$$\vdots$$

$$\theta_{s}^{(i)} \sim \pi(\theta|N_{s}, \theta_{۱}^{(i)}, \theta_{۲}^{(i)}, \dots, \theta_{s-۱}^{(i)}, b) I_{(\theta_{s-۱}^{(i)}, b)}(\theta)$$

نمونه‌های تولیدی در الگوریتم نسبت به مقادیر اولیه الگوریتم حساس نبوده و مقدار حق بیمه نسبی سطح l - ام به ازای l = ۱ , ۲ , … , s نیز با استفاده از $\widehat{E}(\theta_l) = \frac{\sum_{i=۱}^{m} \theta_l^{(i)}}{m}$ برآورد می‌شود.

برای تشخیص هم گرایی، از معیار همگرایی گلمن و روبین[۱] استفاده شده است. این آزمون تشخیصی از فاکتور کاهش مقیاس پتانسیل (PSRF) برای تشخیص همگرایی پارامترهای مدل استفاده می‌کند. برای محاسبه، ابتدا c زنجیر موازی با مقادیر اولیه متفاوت و هر یک با m تکرار تولید می‌کنیم . فاکتور کاهش مقیاس پتانسیل از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$PSRE = \sqrt{\frac{m-۱}{m} + \frac{B(c+۱)}{cmW}}$$

$\frac{B}{m} = \frac{۱}{c-۱}\sum_{j=۱}^{c}(\bar{\theta}_j - \bar{\theta})^۲$: واریانس بین زنجیرها ؛

$W = \frac{۱}{c(m-۱)}\sum_{j=۱}^{c}\sum_{i=۱}^{m}(\theta_{ij} - \bar{\theta}_j)^۲$: واریانس درون زنجیرها ؛

θ_{ij} : عضو i ام از زنجیر j ام ؛

$\bar{\theta}_j$: میانگین زنجیر j ام.

اگر زنجیر به توزیع مشخصی همگرا باشد، تغییرهای بین زنجیر نسبت به تغییرهای درون زنجیر کمتر بوده و لذا مقدار فاکتور کاهش مقیاس پتانسیل نزدیک به عدد یک خواهد بود. برعکس، مقادیر فاکتور بزرگ تر از عدد یک بیانگر عدم وجود همگرایی است. اگر توزیع پسین (۳) شکل بسته‌ای نداشته باشد، از الگوریتم پذیرش - رد برای تولید نمونه استفاده می‌کنیم.

در ادامه مقدار حق بیمه نسبی در سیستم پاداش - جریمه ایران را با استفاده از الگوریتم گیبز محاسبه می‌کنیم. حداکثر مقدار پاداش و حداکثر مقدار جریمه در سیستم پاداش - جریمه ایران به ترتیب برابر a = ۰,۳ و b = ۲ است. هدف برآورد پارامتر مخاطره نسبی سطح l –ام تحت شرط (۲) است و برای انجام مقایسه مقدار پارامترهای مخاطره نسبی بدون شرط (۲) نیز برآورد می‌شوند.

بنا به تحقیق پاینده (۱۳۹۳)، بردار تعداد خسارت‌ها، $N = (N_۱ , \dots , N_s)$ به شرط بردار پارامتر مخاطره نسبی، دارای توزیع شرطی مستقل پواسون به صورت زیر:

$$f(N|\lambda, \Theta) = \prod_{l=۱}^{s} P(N_l = n|\lambda, \theta_l) = \prod_{l=۱}^{s} \frac{\exp(-\lambda\theta_l)(\lambda\theta_l)^n}{n!} \quad l = ۱,۲, \dots, s$$

با پارامتر λ = ۰/۰۷۵۲ است. همچنین بردار پارامتر مخاطره نسبی دارای توزیع پیشین چند متغیره گاماست که تحت شرط (۲) به صورت زیر خواهد بود

$$\pi\Theta = d_s(\delta_۱, \dots, \delta_s; \gamma_۱, \dots \gamma_s \prod_{l=۱}^{s} \frac{\theta_۱^{\delta_۱-۱} \exp(-\frac{\theta_l}{\gamma_۱})}{\gamma_l^{\delta_۱}\Gamma(\delta_۱)} I_{(\theta_{l-۱}, \theta_{l+۱})}$$

به طوری که d_s مقدار ثابت برای شرط چگالی بودن و $\delta_۱, \gamma_۱$ پارامترهای توزیع پیشین چند متغیره گامای مقید ، $\theta_. = a$ و $\theta_{s+۱} = b$ است. در این صورت توزیع پسین به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\pi(\Theta|N, \lambda, \delta_۱^*, \dots, \delta_s^*; \gamma_۱^*, \dots, \gamma_s^*)$$

[۱]. Gelman and Rubin, ۱۹۹۲

$$= d_s^*(\delta_۱^*, \dots \delta_s^*; \gamma_۱^*, \dots, \gamma_s^*) \ \prod_{l=۱}^{s} \frac{\theta_۱^{\delta_l^* - ۱} \exp\left(-\frac{\theta_l^*}{\gamma_۱^*}\right)}{(\gamma_۱^*)^{\delta_۱^*} \Gamma(\delta_۱^*)} I_{(\theta_{l-۱}, \theta_{l+۱})}$$

به طوری که:

$$\gamma_۱^* = \frac{۱}{\gamma_۱ + \lambda}, \delta_۱^* = \delta_۱ + N_۱$$

برای برآورد حق بیمه نسبی با این روش نمونه ای تصادفی به اندازه m = ۱۰۰،۰۰۰ از این توزیع پسین به ازای $\delta_۱ = ۱$ ، $\gamma_۱ = ۱$ تولید شده و سپس مقادیر حق بیمه نسبی را برای سیستم پاداش - جریمه ایران محاسبه و در جدول ۳ آمده است مقادیر فاکتور کاهش مقیاس پتانسیل (PSRF) در جدول بیانگر وجود همگرایی در نمونه‌های تولید شده است.

جدول ۳: نتایج برآورد پارامترهای مخاطره نسبی با استفاده از فضای پارامتری مقید تحت توزیع پیشین گامای مقید با پارامترهای $\delta_۱ = ۱$ ، $\gamma_۱ = ۱$ و $\lambda = ۰.۰۷۵۲$

سطح	حق‌بیمه نسبی برآورد شده	PSRF
۱	۰/۳	۰/۹۹۹
۲	۰/۳۷۷	۰/۹۹۹
۳	۰/۴۶۰	۱/۰۰۰
۴	۰/۵۵۰	۰/۹۹۹
۵	۰/۶۴۷	۱/۰۰۰
۶	۰/۷۵۳	۱/۰۰۰
۷	۰/۸۷۴۱	۱/۰۰۰
۸	۱	۱/۰۰۰
۹	۱/۱۴۵	۱/۰۰۰
۱۰	۱/۳۱۰	۱/۰۰۰
۱۱	۱/۴۷۷	۰/۹۹۹
۱۲	۱/۶۳۳	۰/۹۹۹
۱۳	۱/۷۶۹	۰/۹۹۹
۱۴	۱/۸۹۲	۰/۹۹۹
۱۵	۲	۱/۰۰۰

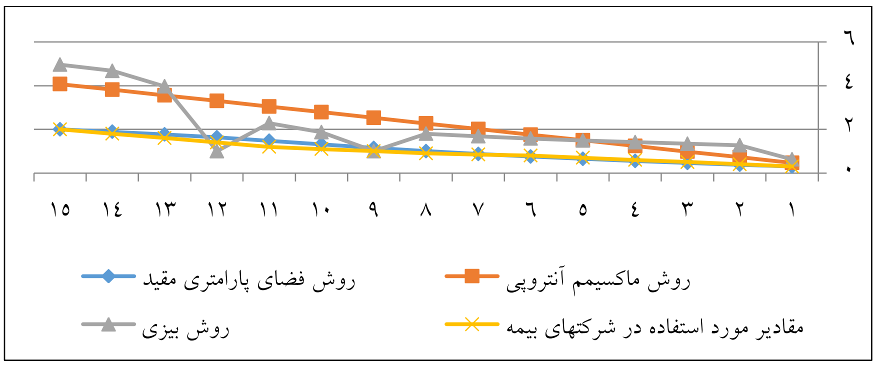
مقایسه سه روش تعیین حق بیمه نسبی در سیستم پاداش - جریمه ایران با مقادیر مورد استفاده در شرکت‌های بیمه

برآوردگر به دست آمده با استفاده از روش بیزی یک برآوردگر منطقی و علمی برای تعیین حق بیمه نسبی در سیستم پاداش - جریمه است. همچنین در بخش‌های قبل دو روش جدید برای محاسبه حق بیمه نسبی بر اساس تئوری‌های معتبر آماری معرفی شد. روش ماکسیمم آنتروپی، برآوردگری خطی با حداکثر عدم قطعیت برای تعیین حق بیمه نسبی بود. از مزایای این برآوردگر می‌توان به سادگی محاسبات، نزدیکی به برآوردگر بیز (برآوردگر منطقی حق بیمه نسبی) و حداقل استفاده از اطلاعات غیر تضمینی (حداکثر عدم قطعیت) اشاره نمود.

روش دوم، تعیین حق بیمه نسبی با استفاده از فضای پارامتری مقید است . مهم ترین مزیت این روش حفظ شرط ترتیبی بودن حق بیمه‌های نسبی محاسبه شده برای سطوح سیستم پاداش - جریمه در رویکرد بیزی است. همچنین برنامه نویسی و محاسبه آسان و انعطاف پذیری نسبت به مفروضات سیستم از دیگر مزایای این روش هستند.

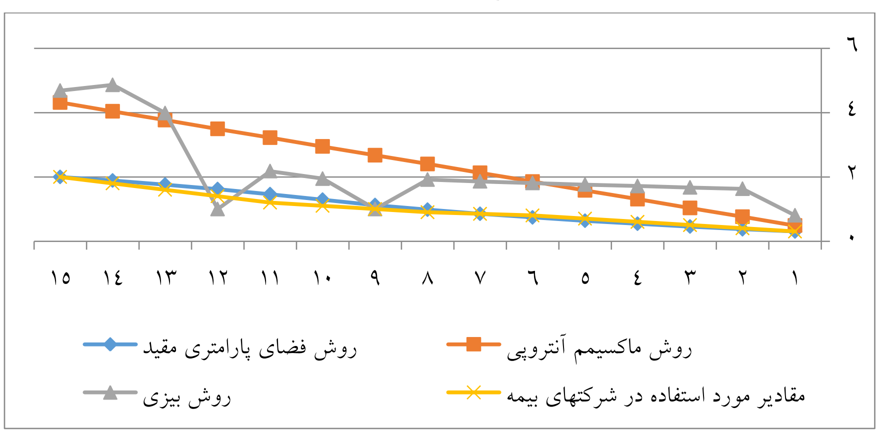
در سیستم پاداش - جریمه مورد استفاده در ایران نیز حق بیمه‌های نسبی سطوح مختلف محاسبه و توسط بیمه مرکزی ج.ا.ا منتشر می‌شود. سؤالی که در ادامه پیش می‌آید این است که استفاده از این دو روش برای تعیین حق بیمه نسبی چه مزیتی دارد . در ادامه مقدار حق بیمه نسبی در سیستم پاداش - جریمه ایران به ازای سه مقدار مختلف برای متوسط فراوانی خسارت‌ها محاسبه و مورد مقایسه قرار می‌گیرد. با توجه به حق بیمه‌های نسبی اعلام شده توسط بیمه مرکزی ج.ا.ا مقدار حداقل حق بیمه نسبی ۳۰٪ و حداکثر آن ۲۰۰٪ است. همچنین سطح ۹، سطح اولیه سیستم بوده و بیمه گذاران فقط در ابتدای ورود به سیستم در این سطح قرار می‌گیرند لذا احتمال حضور در این سطح برای سال‌های بعد برابر صفر است. مقدار حق بیمه بیزی برای این سطح برابر یک در نظر گرفته شده است. حالت اول: بنا به تحقیق پاینده (۱۳۹۳) متوسط فراوانی خسارت برابر ۷/۰۵۲ ٪ است. مقدار حق بیمه نسبی به ازای $\lambda = ۰/۰۷۵۲$ با استفاده از هر سه روش پیشنهادی محاسبه و در نمودار ۳ درج شده است.

نمودار ۳: مقدار حق بیمه نسبی با استفاده از روش‌های بیزی، ماکسیمم آنتروپی و فضای پارامتری مقید در مقابل مقادیر مورد استفاده در شرکت‌های بیمه به ازای $\lambda = ۰.۰۷۵۲$



حالت دوم: در این حالت مقدار متوسط فراوانی خسارت را کمتر از مقدار اول و برابر ۳٪ در نظر گرفته و مقدار حق بیمه نسبی با استفاده از هر سه روش پیشنهادی محاسبه و در نمودار ۴ درج شده است.

نمودار ۴: مقدار حق بیمه نسبی با استفاده از روش‌های بیزی، ماکسیمم آنتروپی و فضای پارامتری مقید در مقابل مقادیر مورد استفاده در شرکت‌های بیمه به ازای $\lambda = ۰.۰۳$



حالت سوم: در این حالت مقدار متوسط فراوانی خسارت را بیشتر از مقدار اول و برابر ۱۰ در نظر گرفته و مقدار حق بیمه نسبی با استفاده از هر سه روش پیشنهادی محاسبه و در نمودار ۵ رسم شده است.

نمودار ۵: مقدار حق بیمه نسبی با استفاده از روش‌های بیزی، ماکسیمم آنتروپی و فضای پارامتری مقید در مقابل مقادیر مورد استفاده در شرکت‌های بیمه به ازای $\lambda = ۰.۱$

با توجه به اینکه در روش فضای پارامتری مقید، مقادیر حداقل و حداکثر حق بیمه نسبی به ترتیب ۳۰٪ و ۲۰۰٪ استفاده شده است، مقدار حق بیمه‌های نسبی با استفاده از این روش در هر سه حالت بسیار نزدیک به مقادیر مورد استفاده در شرکت‌های بیمه است، با این تفاوت که این مقادیر بر اساس تئوری‌های معتبر علمی محاسبه می‌شوند. همچنین این مقادیر نسبت به مقادیر متفاوت متوسط فراوانی ادعا (λ) حساس بوده و در صورت تغییر مقدار آن در سیستم، به راحتی به روز شده و لذا قابل اعتمادتر هستند. همچنین مقادیر حق بیمه نسبی با استفاده از روش ماکسیمم آنتروپی و روش بیزی بیشتر از دو روش دیگر است. مقادیر به دست آمده با استفاده از روش ماکسیمم آنتروپی علاوه بر خاصیت صعودی بودن، به دلیل وجود رابطه خطی دارای مزیت سادگی هستند. همچنین این مقادیر تنها بر اساس اطلاعات موجود (قیدهای مسئله) محاسبه می‌شود.

بنا به مقادیر حق بیمه نسبی مورد استفاده در شرکت‌های بیمه، تنها بیمه گذاران سطوح ۱۰ الی ۱۵ مشمول پرداخت جریمه در حق بیمه‌های خود هستند . این درحالی است که بنا به مقادیر حق بیمه‌های نسبی محاسبه شده در هر سه روش بیزی، ماکسیمم آنتروپی و فضای پارامتری مقید، تعداد سطوح جریمه بیشتر از پنج سطح مورد استفاده در شرکت‌های بیمه است. بنابراین به نظر می‌رسد در نظر گرفتن پنج سطح جریمه در مقابل نه سطح پاداش در سیستم پاداش - جریمه منطقی نیست. لذا می‌توان با در نظر گرفتن این مطلب، سیستم پاداش - جریمه‌ای با تعداد سطوح بیشتر در نظر گرفت. همچنین در سیستم پاداش - جریمه مورد استفاده، سطح بیمه گذار تنها زمانی اهمیت دارد که خسارتی در طول سا ل گزارش نکرده باشد. در صورت گزارش خسارت توسط بیمه گذار، شماره سطح بیمه گذار در طول پوشش بیمه‌ای هیچ تأثیری در میزان جریمه و در نتیجه حق بیمه سال آینده وی نخواهد داشت. این مسئله خاصیت تشویق بیمه گذاران برای رانندگی با احتیاط بیشتر و بازدارندگی از وقوع خسارت را در سیستم پاداش - جریمه کمتر خواهد نمود.

جمع‌بندی و پیشنهادها

در این مقاله دو روش جدید برای محاسبه حق بیمه نسبی ارائه شد. در روش اول با استفاده از اصل ماکسیمم آنتروپی یک برآوردگر خطی با حداکثر عدم قطعیت برای تعیین حق بیمه نسبی معرفی شد. این برآوردگر به سادگی قابل استفاده بوده و برای محاسبه آن از حداقل اطلاعات غیر تضمینی (حداکثر عدم قطعیت) استفاده می‌شود. بنا بر معیار کارایی لومیرانتا، در عمل برآوردگر ماکسیمم آنتروپی کارایی بیشتری دارد و بنا به معیار ضریب تغییرات، بازدارندگی بیشتری را برای گرایش به تصادف در بین بیمه گذاران تضمین می‌کند. روش دوم، تعیین حق بیمه

نسبی با استفاده از فضای پارامتری مقید بود. این روش علاوه بر مزیت امکان وارد کردن اطلاعات پیشین بیمه گذاران در برآورد حق بیمه نسبی، با حفظ شرط ترتیبی بودن حق بیمه‌های نسبی محاسبه شده برای سطوح سیستم پاداش - جریمه، برآوردهای عادلانه‌ای ارائه می‌دهد. مزیت دیگر این روش انعطاف پذیری بسیار نسبت به تغییر مفروضات اولیه سیستم از جمله متوسط فراوانی خسارت بیمه گذاران است. در نهایت نیز به ازای سه مقدار مختلف λ,{۰.۰۷۵۲ ،۰.۰۳ ,۰.۱}$\lambda\epsilon$ مقادیر حق بیمه نسبی در سیستم پاداش- جریمه ایران با دو روش پیشنهادی محاسبه و با مقادیر مورد استفاده در شرکت‌های بیمه مورد مقایسه قرار گرفتند . نتایج مقایسه ، بیانگر لزوم تغییر در سیستم پاداش - جریمه مورد استفاده در کشور است.

منابع و ماخذ

پاینده نجف آبادی، الف.ت. (۱۳۹۳). تعیین روش بهینه محاسبه حق بیمه شخص ثالث، طرح پژوهشی به سفارش پژوهشکده بیمه، گروه بیمه‌های اموال و مسئولیت.

Abbas; A.E., (۲۰۰۲). An entropy approach for utility assignment in decision analysis. The ۲۲nd International Workshop on Bayesian Inference and Maximum - Entropy Model in Sciences, Engrg, Moscow.

Abbas; A. E., (۲۰۰۶). Maximum - entropy utility. Operation Research, ۵۴, pp. ۲۷۷–۲۹۰

Ayer; M.; Brunk; H.D.; Ewing; G.M.; Reid; W.T. Silverman; E., (۱۹۵۵). An empirical distribution function for sampling with incomplete information. Ann. Math. Statist., ۲۶, pp. ۶۴۱ - ۶۴۷.

Conrad; K., (۲۰۱۳). In probability distributions and maximum entropy.<http://www.math.uconn.edu/~kconrad/blurbs/analysis/entropypost.pdf> [Accessed ۱۸ May ۲۰۱۳].

Cover; T.M Thomas; J.A., (۲۰۰۶), Elements of information Theory. New York: John Wiley and Sons.

Darooneh; A. H., (۲۰۰۴). Non - life insurance pricing: Multi agent model. The European Physical Journal B—Condensed Matter and Complex Systems, ۴۲, pp. ۱۱۹–۱۲۲.

Darooneh; A.H., (۲۰۰۶). Utility Function from maximum entropy principle. Entropy, ۸, pp. ۱۸–۲۴.

Denuit; M.; Marechal; X.; Pitrebois; S. Walhin; J.F., (۲۰۰۷). Actuarial modeling of claim counts: Risk classification, credibility and bonus - malus systems, John Wiley & Sons.

Gelfand; A.E.; Smith; A.F.M. Lee; T.M., (۱۹۹۲). Bayesian analysis of constrained Parameter and truncated data problems using gibbs sampling. Journal of the American Statistical Association, ۸۷(۴۱۸), pp. ۵۲۳ - ۵۳۲.

Gelman; A. Rubin; D.B., (۱۹۹۲). Inference from iterative simulation using multiple sequences. Statistical Science, ۷, pp. ۴۵۷ - ۵۱۱.

Gilde; V. Sundt; B., (۱۹۸۹). On bonus systems with credibility scales. Scandinavian Actuarial Journal, ۱, pp. ۱۳ - ۲۲.

Gzyl; H.; Novi - Inveradi; P.L. Tagliani; A., (۲۰۱۳). Determination of probability of ultimate ruin by maximum entropy applied to factional moments. Insurance: Mathematics & Economics, ۵۳(۲), pp. ۴۵۷ - ۴۶۳.

Jaynes; E.T., (۱۹۵۷). Information theory and statistical mechanics. Physical Reviews. ۱۰۶, pp. ۶۲۰–۶۳۰.

Jessop; A., (۱۹۹۹). Entropy in multiattribute problems. Journal of Multi - Criteria Decision Analysis, ۸, pp. ۶۱–۷۰.

Krvavych; Y. Mergel; V., (۲۰۰۰). Large loss distributions: Probabilistic properties, EVT tools, maximum entropy characterization. Proceedings of the ۳۱st ASTIN Colloquium, Italy: Sardinia.

Kubokawa; T., (۱۹۹۴). A united approach to improving equivariant estimators, annals of Statistics, ۲۲, pp. ۲۹۰ - ۲۹۹.

Kubokawa; T., (۲۰۰۵a). Estimation of bounded location and scale parameters. Journal of the Japanese Statistical Society, ۳۵, pp. ۲۲۱ - ۲۴۹.

Kubokawa; T., (۲۰۰۵b). Estimation of a mean of a normal distribution with a bounded coefficient of variation. Sankhya: The Indian Journal of Statistics, ۶۷, pp. ۴۹۹ - ۵۲۵.

Landsman; Z., (۱۹۹۹). Credibility evaluation for the exponential dispersion Family. Insurance: Mathematics and Economics, ۲۴, pp. ۲۳–۲۹.

Loimaranta; K., (۱۹۷۲). Some asymptotic properties of bonus systems. ASTIN Bulletin. ۶, pp. ۲۲۳ - ۲۴۵.

Marchand; E. Payandeh; A.T., (۲۰۱۱). Bayesian improvements of a MRE estimator of a bounded location parameter. El. J. Statistics, ۵, pp. ۱۴۹۵ - ۱۵۰۲.

Marchand; E. Strawderman; W.E., (۲۰۰۴). Estimation in restricted parameter spaces: A review. Festschrift for Herman Rubin, IMS Lecture Notes - Monograph Series, ۴۵, pp. ۲۱ - ۴۴.

Norberg; R., (۱۹۷۶). A credibility theory for automobile bonus system. Scandinavian Actuarial Journal, ۲, pp. ۹۲ - ۱۰۷.

Pardo; L., (۲۰۰۶). Statistical inference based on divergence measures. Chapman & Hall/CRC.

Park; S.C.; Lemaire; J. Chua; C.T., (۲۰۱۰). Is the design of bonus - malus systems influenced by insurance maturity or national culture?Evidence from Asia. The Geneva papers. ۳۵, pp. ۷ - ۲۷.

Payandeh; A.T.; Hatami; H. Omidi Najafabadi; M., (۲۰۱۲). A maximum - entropy approach to the linear credibility formula. Insurance: Mathematics and Economics, ۵۱(۱), pp. ۲۱۶–۲۲۱.

Sachlas; A. Papaioannou; T., (۲۰۱۴). Residual and past entropy in actuarial science and survival models. Methodology and Computing in Applied Probability. ۱۶ (۱), pp. ۷۹ - ۹۹.

Tremblay; L., (۱۹۹۲). Using the poisson inverse gaussian in bonus - malus systems. ASTIN Bulletin, ۲۲, pp. ۹۷ - ۱۰۶.

Van - Eden; C., (۱۹۵۶). Maximum likelihood estimation of ordered probabilities. Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetencsh., A (۵۹), pp. ۴۴۴ - ۴۵۵.

Van - Eden; C., (۱۹۵۷a). Maximum likelihood estimation of partially or completely ordered parameters. Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetencsh., A (۶۰), pp. ۱۲۸ - ۱۳۶, ۲۰۱ - ۲۱۱.

Van - Eden; C., (۱۹۵۷b). Note on two methods for estimating ordered parameters of probability distributions. Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetencsh., A (۶۰), pp. ۵۰۶ - ۵۱۲.

Van - Eden; C., (۱۹۵۷c). A least squares inequality for maximum likelihood estimates of ordered parameters. Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetencsh., A (۶۰), pp. ۵۱۳ - ۵۲۱.

Van - Eden; C., (۱۹۵۸). Testing and estimating ordered parameters of probability distributions. Ph.D. Thesis, University of Amsterdom.

Walhin; J.F. Paris; J., (۱۹۹۹). Using mixed poisson distribution in connection With Bonus - malus systems. ASTIN Bulletin. ۲۹, pp. ۸۱ - ۹۹.

Zografos; K., (۲۰۰۸). On some entropy and divergence type measures of variability and dependence for mixed continuous and discrete variables. J Stat Plan Inference, ۱۳۸, pp. ۳۸۹۹–۳۹۱۴.